GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNEA" SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică".
4. Asupra unei chestiuni de examen . . *Virgil Ghiţescu.*
5. Raport pentru acordarea premiului „General Scarlat Panaitescu" . . . *Comisiunea pentru premii.*
6. Note matematice: 1 — 3.
7. Bibliografie.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 4550, 5339, 5453, 5536, 5769, 5888.
10. Exerciţii: 1 — 2.
11. Probleme propuse: 6006 — 6020.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **60**06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL L

15 SEPTEMVRIE 1944 — 15 AUGUST 1945

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1944

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1944 *)

I. I. CHIȚULESCU, P. SERGESCU, AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru: cereri, diverse și suplimente.

O. N. ȚINO ajutat de G. G. CONSTANTINESCU și G. SIMIONESCU. Raportori.

G-L GH. BUICLIU, G-L GH. I. LITEANU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru: schimburi de reviste și primirea lor, reclamațiuni privitoare la tipărire.

G-L GH. BUICLIU și GH. ILIESCU. Membri delegați pentru cercetarea manuscriselor, repartizarea lor și imprimarea revistei.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

G. G. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, CPT. C. IONESCU-ȚIU, N. N. MIHĂILEANU și F. PĂSĂRICĂ. Membri delegați pentru corecturi.

G-L G. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, M. GHERMĂNESCU, C-DOR I. LINTEȘ, O. N. ȚINO și C-DOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică.

E. ARGHIRIADE, D. BARBILIAN, ADRIAN GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, MAIOR M. FOCȘENEANU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI, AL. ROȘU, G. D. SIMIONESCU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru geometrie.

I. S. ANTONIU, VIRGIL GHIȚESCU, G-L GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, CPT. A. I. STAN și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru trigonometrie.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 14 din Statute).

TH. ANGHELUȚĂ, G. G. CONSTANTINESCU, OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, AL. ROȘU, O. N. ȚINO și Ș. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru Algebra Elementară.

I. CHIȚULESCU, GH. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU, AL. NICULESCU, AL. PANTAZI și GH. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru Geometrie Descriptivă.

I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU, C. C. TEODORESCU și GABRIELA ȚIȚEICA. Membri delegați pentru Mecanică.

N. ABRAMESCU, G. G. CONSTANTINESCU, MAIOR M. FOCȘENEANU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, CPT. A. I. STAN, O. N. ȚINO și GABRIELA ȚIȚEICA. Membri delegați pentru Geometria Analitică.

G. G. CONSTANTINESCU, C. IONESCU-BUJOR, G-L GH. LITEANU și AL. STOENESCU. Membri delegați pentru Cosmografie.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ, D. V. IONESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, AL. PANTAZI, TIB. POPOVICIU, P. SERGESCU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru Articole și Note de matematici superioare.

N. ABRAMESCU, I. IONESCU, V. MARIAN și P. SERGESCU. Membri delegați pentru Istoria matematicilor.

I. IONESCU, O. ONICESCU, P. SERGESCU și GH. ZAPAN. Membri delegați pentru Filosofia matematicilor.

O. N. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

G-L GH. BUICLIU, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, CPT. C. IONESCU-ȚIU, G-L GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, CPT. A. I. STAN și CPT. I. GH. ZAMFIRESCU. Membri delegați pentru Exerciții.

GH. TH. GHEORGHIU, P. SERGESCU, GABRIELA ȚIȚEICA, Ș. ȚIȚEICA, R. ȚIȚEICA, CPT. I. GH. ZAMFIRESCU și C-DOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru Chestiuni de examen.

G-L GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU și GEORGETA ROMAȘCAN, Membri delegați pentru alcătuirea Tablei de materii.

MEMBRII

1	1907, Iulie 1*	ABRAMESCU NICOLAE. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Științe Timișoara. — Str. Mocioni, 10. Timișoara.
2	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timișoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timișoara.
3	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licențiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. București 4.
4	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licențiat în Științe Matematice. — Șef de birou tehnic în Direcțiunea de Poduri C. F. R., Asistent la Politehnica din București. — Str. Mihail Cornea, 41. București 2.

*) Data admiterii.

5	1943, Febr. 18	AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL. Inginer Constructor. Diplomat al Politehnicei Bucureşti. Subşeful Secţiei L. 4 C. F. R., Craiova. Calea Împăratul Traian 11. Craiova.
6	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. — Directorul General al minelor. Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3.
7	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Rectorul Politehnicei Timişoara.
8	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii „Regele Ferdinand I". — Str. Eugen de Savoia, 9. Timişoara.
9	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer Inspector General. — Membru în Consiliul Technic Superior. Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P. — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2.
10	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Calea Floreasca, 150. Tel. 29437. Bucureşti 3.
11	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
12	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic. Timişoara.
13	1941, Iunie 5	AVRAMESCU AUREL. Doctor-Inginer electrician dela Politehnica din Dresda. — Şef Serv. Studii Soc. G-lă Gaz şi Electricitate. Asistent la Politehnică. — Str. Sft. Constantin, 24. Et. 3. Bucureşti 2.
14	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor. — Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2.
15	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director S. T. B. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Mareşal Antonescu, 38. Bucureşti 2.
16	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 12. Bucureşti.
17	1942, Aug. 27	BĂDULESCU ALEXANDRA. Licenţiată în Matematici a Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti. — Profesoară de Matematici la Liceul din Târgul Ocna.
18	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo, 560. Republica Argentina.
19	1940, Aug. 28	BĂLAN G. ŞTEFAN. Inginer Constructor. — Str. Lt. Negel, 59. Bucureşti 6.
20	1941, Sept. 18	BALLAN EUGEN. Inginer electromecanic. S. P. B. Licenţiat în Matematici. — Director General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. Director General al Oficiului General al Planurilor de Investiţii. — Str. Brezoianu, 29 (Alee). Bucureşti.
21	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.

22	1944, Febr. 9	BAZACOV GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor definitiv la Liceul Traian din Turnu-Severin. — Str. Adrian 119. Turnu-Severin.
23	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Bibliotecar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti.
24	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Director General al Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49. Bucureşti 2.
25	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Secţia construcţii. — Subşef de serviciu în Administraţia Comercială a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe apă. — Aleea Alexandru, 11. Bucureşti 3.
26	1926, Iunie 28	BRENNER M. AVRAM. Inginer. — Str. Popa Petre Nr. 1. Bucureşti.
27	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.
28	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Cpt. Licenţiat în Matematici. Inginer Electromecanic. Absolvent al Secţiei de Radio-Comunicaţii. Şeful Serv. Tehnic al stabilimentelor de aeronautică. Profesor la Şcolile Militare. — Str. Aviator Th. Iliescu, 31. Bucureşti 3.
29	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Crimeia, 32. Bucureşti 3.
30	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General/r. din Artilerie. — Însărcinat cu conferinţe la Politehnica din Bucureşti. — Str. M. Cogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
31	1938, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. — Directorul Podurilor C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
32	1924, Ian. 30	BUNESCU D. ALEXANDRU. Inginer. S. N. P. S. — Str. Arcului 26. Bucureşti 1.
33	1943, Aug. 26	BUNESCU D. EUGEN. Inginer. — Director în Societatea Concordia-Ploeşti. — Str. Rahovei, Nr. 19. Ploeşti.
34	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Col. de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa). Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Război din Paris. — Comand. Centr. de Instr. al Art. ant. aer. şi al Şcoalei de ofiţeri de Artilerie antiaeriană. — Str. Franzelari, 19. Bucureşti.
35	1920, Ian 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer Inspector General. Director C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48, Bucureşti 6.
36	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General. Licenţiat şi Doctor în Matematici dela Paris. — Profesor Universitar onorar. Profesor de metalurgie. Consilier general tehnic al Uzinelor şi Oţelăriilor Rogifer. — Str. General Berthelot, 95. Bucureşti 2.
37	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer-Şef. — Subşef de serviciu. Direcţiunea atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti — Str. Vaselor, 40 Bis. Bucureşti 4.

38	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
39	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. — Directorul Întreţinerii din Direcţiunea Generală a Drumurilor. Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Str. Simonide, 3. Bucureşti 1.
40	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
41	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Aron Florian, 4. Bucureşti 3.
42	1942, Aug. 27	CARACOSTEA D. ANDREI. Inginer absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inspector ajutor în Direcţiunea de Poduri C. F. R. — B-dul Lascăr Catargiu, 28. Bucureşti 3.
43	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Polonă, 9. Bucureşti 3.
44	1920, Mart. 1	CARAMAN ERMIL. Licenţiat în Matematici. — Fost prefect şi deputat. Directorul Liceului „V. Alesandri" din Galaţi. Preşedintele consiliului interşcolar al oraşului Galaţi. — Str. General Berthelot, 81. Galaţi.
45	1944, Febr. 9	CARANFIL G. NICOLAE. Inginer. — Directorul General al Societăţii Generale de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Aleia Modrogan, 17. Bucureşti.
46	1944, Febr. 16	CÂRLĂNESCU C. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar la Liceul Construcţii Civile şi edilitare. — Bul. Maria, 24. Bucureşti.
47	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. Antreprenor. — Intrarea Tudor Ştefan, 4. Bucureşti 2.
48	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. General de Artilerie. — Str. G-ral Ipăteşcu, 20. Bucureşti 4.
49	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
50	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE, Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar definitiv de matematici la Seminarul Teologic din Chişinău. — Str. General Dragalina, 27. Chişinău.
51	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
52	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General. — Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă.
53	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer Inspector General. — Director în Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Iancu Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
54	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.

55	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.— Stradela Bucovina, 7. Bucureşti 2.
56	1940, Febr. 8	CIORAPCIU F. MIRCEA. Inginer Constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Vâlcov, 56. Bucureşti 4.
57	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.—Str. Lt. Radu Robescu, 24. Bucureşti.
58	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GEORGE. Inginer diplomat al S. P. B. Director General al Uzinelor Rogifer. — Str. B. Mussolini, 22. Bucureşti 3.
59	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Doctor în Matematici. — Str. Aquila, 10. Bucureşti 6.
60	1895,Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
61	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Inspector conducător al Atelierelor E. C. F. R. Filaret. — Str. Gh. Popescu, 1. Bucureşti 6.
62	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer în Biroul studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de Avioane I. A. R. Str. Mihail Eminescu, 17. Braşov.
63	1941, Febr. 20	COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN. Căpitan. — Comandantul Submarinului „Delfinul". Profesor la Şcoala Navală. — Nava bază Constanţa.
64	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Str. Polonă, 57. Bucureşti 3.
65	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. Căpitan. — B-dul Mărăşti, 47. Bucureşti 2.
66	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici.— Profesor.— Comuna Popeşti, Jud. R.-Sărat. Oficiul Gugeşti.
67	1943, Aug. 26	DAVIDESCU ANA. Inginer constructor. Diplomat Politehnica Bucureşti. — Inginer constructor la Dir. Silozuri din P. C. A. — Str. Silvestru, 85. Bucureşti.
68	1941, Iunie 5	DINESCU P. ALEX. TUDOR. Inginer Constructor.— Asistent suplimentar la Şcoala Politehnică Bucureşti. Şef de Secţie la R. A. C. F. R. — Str. Eufrosina Poteca, 5. Bucureşti 4.
69	1939, Febr. 23	DOBRESCU ANDREI. Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Liceul industrial de construcţii civile şi edilitare din Bucureşti. — B-dul Maria, 24. Bucureşti 5.
70	1939, Aug. 31	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici. — Fost asistent la Politehnica din Bucureşti. Profesor titular la Colegiul naţional militar „N. Filipescu". Predeal.
71	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Maior de Artilerie, brevetat de Stat Major.— Profesor de Muniţiuni şi Construcţii de guri de foc la şcolile de Artilerie. Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. M. A. N. Cabinetul Ministrului — Str. General Anghelescu, 159. Bucureşti, 2.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită 1 Septemvrie 1909.

72	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. — Director al Uzinelor Astra şi Union. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.
73	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef, — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 22. Craiova.
74	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor Colegiul Naţional Sf. Sava Bucureşti. Inspector general în învăţământul secundar din Ministerul Culturii Naţionale. Preşedintele Consiliului Inspectorilor Generali. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti, 6.
75	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. Cuza Vodă, 94. Bucureşti 2.
76	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.
77	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor S. P. B.. — Inginer C. F. R. Asistent la Politehnica Bucureşti. — Str. Vaselor, 28. Bucureşti 4.
78	1938, Febr. 17	FLORIAN D. ZAHARIA. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. — Profesor. Director la Societatea de Asigurare „Naţionala". — B-dul Elisabeta, 95 bis A., Et. III. Bucureşti, 2.
79	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Maior de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Porumbaru, 33. Bucureşti 3.
80	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Calea Victoriei 70, ap. 45, etajul 6. Bucureşti 1.
81	1943, Aug. 26	GAFENCU RODICA. Licenţiată în matematici. Profesoară. — Str. Unirii, 99. Buzău.
82	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. — Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Wilson, 13. Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.
83	1944, Mai 8	GEORGESCU CALIPSO. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Vasile Stroescu 10. Bucureşti.
84	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
85	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. NICOLAE. Inginer Inspector General. — Director C. A. M. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
86	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică dela Universitatea din Paris. — Director în Ministerul Economiei Naţionale. Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
87	1939, Dec. 7	GEORGESCU-ROEGEN OTILIA. Licenţiată în Matematici.—Profesoară secundară. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
88	1934, Dec. 19	GEORGESCU VAL. N. ION. Maior de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — M. I. A. Dir. Tehnică. — Str. Carol, 124. Câmpina.

89	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General/r. de Artilerie. — Str. Mântuleasa, 5. Bucureşti.
90	1936, Febr 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. Turda, 209. Bucureşti 2.
91	1944, Mai 8	GHIOLU D. STAVRI. Inginer. Str. Nicolae Ionescu 17. Bucureşti.
92	1941, Iunie 5	GHEORGHIU ALEXANDRU. Inginer constructor. — Directorul Soc. Anonime de Mine de granit, din Poeni. Asistent la Şcoala Politehnică. — Calea Victoriei, 128. Bucureşti.
93	1932, Apr 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Profesor Şcoala Politehnică Timişoara.
94	1914, Ian 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
95	1913, Aug 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Ad-ţia Comercială P. C. A. — Str. Aviator Iliescu, 44. Bucureşti 3.
96	1929, Aug 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Matematici dela Paris. Statistician. — Directorul Statisticei financiare.— Calea Griviţei, 217. Bucureşti 2.
97	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Lalescu, 3. Timişoara, 3.
98	1939, Dec. 7	GHERMANI DIONISIE. Inginer constructor şi electrician. — Profesor. Decan al Facultăţii de Construcţii, Politehnica din Bucureşti. Membru în diverse Comitete şi consilii Tehnice ale Statului. Adm. Delegat la Soc. Edilitatea. — Str. Paris, 45. Bucureşti 3.
99	1942, Febr. 19	GHICA AL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Aleea Alexandru, 16. Bucureşti 3.
100	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. AL. Col. Inginer Radio-electrician. E. S. E. (Paris). — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2.
101	1944, Mai 8	GHIOLU D. STAVRI. Inginer. — Str. Nicolae Ionescu, 17. Bucureşti.
102	1939, Febr 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici.—Asistent suplinitor Seminarul de Algebră superioară. — Facultatea de Ştiinţe. Timişoara.
103	1936, Aug 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer U. D. R. Bucureşti. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.
104	1942, Aug. 27	GHIŢESCU SPIRIDON. Licenţiat în Matematici, Diplomat al Institutului de Statistică din Bucureşti.— Profesor secundar la Liceul comercial „Petru Rareş" din Bucureşti.— Inspector General Şcolar în Ministerul Muncii. — Str. Al. Constantinescu, 1. Parcul Domeniilor, Bucureşti. Telefon 4.72.32.
105	1931, Mart 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
106	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
107	1944, Mai 8	GRIGORESCU ION. Inginer. — Subdirector Ministerul Culturii Naţionale. — Bucureşti.

108	1936, Febr. 27	GUŢU I. AL. Inginer. — Inginer la Societatea Petroşani. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
109	1941, Iunie 5	GUŢU ION. Inginer constructor. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R. — Str. Vişinilor, 2. Bucureşti 4.
110	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Director C. A. M. — Cartierul C. A. M. Filaret. Str. B, 12. Bucureşti 6.
111	1927, Ian. 28	HANGANU M. D. Doctor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris.— Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
112	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R. — Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.
113	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer Inspector General. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
114	1928, Aug. 29	ILIESCU TRAIAN. General. — Directorul Liceelor Militare. — Str. Speranţei, 47 bis. Bucureşti.
115	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2.
116	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
117	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Sorbona din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj-Sibiu. Decan al Facultăţii de Ştiinţe. — B-dul Diaconovici Loga, 8 B. Timişoara.
118	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Ştiinţele Matematice. — Asistent la Facultatea de Arhitectură din Bucureşti. Profesor secundar. — Str. Agricultori, 15. Ap. 13. Bucureşti 4.
119	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU ION. Inginer Inspector General. — Profesor onorific al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Pensionar. — Str. Răsuri, 25. Bucureşti 3.
120	1941, Febr. 20	IONESCU I. PAUL. Profesor definitiv de matematici la Liceul comercial „Gh. Chiţu". — Str. Banu Mihalcea, 29. Craiova.
121	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Inspector şcolar. — Str. Sandu Aldea, 35. Bucureşti 2.
122	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici. — Profesor — Str. Petrescu IX. Nr. 30. Bucureşti.
123	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU D. C. Cpt. Inginer constructor. Licenţiat în Matematici. — Şeful secţiei studii şi proiecte din S. S. Marină Serv. Geniu şi Domeniu. — Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
124	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. Inginer Şef cl. II. — Directorul Fabricei de Timbre. — Str. Fabrica de Chibrituri, 28. Bucureşti 6.
125	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Comandor-Inginer. — Comandantul Şc. Tehnice ale Aeronauticii, Mediaş.
126	1929, Ian. 30	KAUFMANN NORBERT. Inginer S.N.P.S., Inginer-Consilier, Direcţiunea Lucrărilor Noi, C.F.R.— Str. General Manu 26, Bucureşti 2.

127	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
128	1939, Febr. 23	LASCU BAL. Licenţiat în Matematici.
129	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer-Şef. — Director în Administraţia C. A. M. Asistent la Şcoala Politehnică. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
130	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Directorul Şcoalei de Electricieni şi Mecanici. — Bul. Regele Albert, 35. Bucureşti.
131	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Comandor. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnică din Bucureşti. Membru al Academiei de Ştiinţe din România. Comisar General-ajutor la Comisariatul pentru Industriile de metalurgie şi armament. — Str. Zoe Râmniceanu, 10 B. Bucureşti 2.
132	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General de artilerie, pensionat.—Str. Spătarului, 54. Telefon 2-0940. Bucureşti 1.
133	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — St. Dr. Mirinescu, 23. Bucureşti.
134	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici şi Fizico-Chimice. — Profesoară de matematici şi Directoarea Şcolii Centrale de fete din Bucureşti. — Str. General Lahovary, 3. Bucureşti 3.
135	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
136	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. Fost Director General al Regiei Monopolului Statului. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
137	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Str. Amiral Bălescu, 10. Bucureşti 3.
138	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Bd. Dacia, 41. Bucureşti 3.
139	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
140	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — Intrarea Geneva, 6. Bucureşti 3.
141	1939, Dec. 7	MARIAN VICTOR. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Bul. Diaconovici Loga, 1 A. — Timişoara.
142	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
143	1943, Aug. 26	MATEESCU DAN. Inginer diplomat. — Inginer la Uzinele Reşiţa. — Str. Gh. Lazăr, Nr. 5. Reşiţa.
144	1943, Aug. 26	MĂTIEŞ V. ION. Licenţiat în matematici. — Profesor titular definitiv la Liceul „Sf. Vasile", Blaj. — Aleea Viitorului, Nr. 11. Blaj.
145	1944 Aug. 21	MAVRODIN D. DUMITRU. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Şcoala de Arhitectură. — Str. Antim 62. Bucureşti 6.

146	1943, Febr. 18	MEHEDINCU VASILE. Licenţiat în matematici. Profesor titular definitiv la Liceul Comercial „N. Bălcescu", Bucureşti. — Str. Alex. Constantinescu, Nr. 24. Parcul Domeniilor. Bucureşti 2.
147	1939, Aug. 31	MEREUŢĂ EM. Licenţiat în Matematici. — Str. Niculescu Bazar, 7. Parcul Iancului. Bucureşti.
148	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Intreţinere C. F. R. — Str. Ştefan Burcuş, 12. Bucureşti 2.
149	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Maior de Artilerie. Licenţiat în Fizico-chimice şi Drept, brevetat al Şcoalei de Război din Paris. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. Profesor la Şcoala Ofiţeri A. C. A. — Str. Delea Veche, 15 bis. Bucureşti 4.
150	1942, Aug. 27	MIHĂIESCU S. ŞTEFAN. Inginer, Diplomat al Şcolii Politehnice din Bucureşti. — Societatea Concordia. — Uzinele Metalurgice Concordia. Ploeşti.
151	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Str. Vulturilor, 63. Bucureşti 4.
152	1921, Febr 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
153	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. Director în Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Agricultori, 83. Bucureşti 4.
154	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Licenţiat în Matematici. — Str. Vulturilor, 48. Bucureşti 4.
155	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia", Gura Ocniţei. Jud. Dâmboviţa. — Aleea Eminescu, 14. Ploeşti.
156	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Director Liceul „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galaţi, 59. Brăila.
157	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer Inspector General. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
158	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer Inspector General. Licenţiat în Matematici. — Director Tehnic Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti 3.
159	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.
160	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. Licenţiat în Matematici. — Inginer la Direcţia Poduri C. F. R. — Gara de Nord. Bucureşti 2.
161	1939, Febr. 23	MORŢUN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „I. C. Brătianu". Piteşti.
162	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer. — Director General S. T. B. — Str. Roma, 59. Bucureşti 3.
163	1944, Feb. 9	NEGOESCU NICOLAE. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Catedra de Calcul Diferenţial şi Integral din Iaşi. — Str. Florescu 7. Iaşi.
164	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licenţiat în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Profesor definitiv la Liceul Codreanu din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.

165	1944, Feb. 9	NEICU MIRCEA. Inginer. Dipl. al Şcoalei Politehnice din Berlin. — Inginer la Direcţia D. C. F. R. — Şoseaua Jianu 34. Bucureşti III.
166	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. Agricultori, 15. Bucureşti 4.
167	1910, Mai 21	NICHIFOR A. GHEORGHE. Doctor în Ştiinţele Matematice.—Profesor universitar onorar. — Str. Poliţiei, 3. Bucureşti 1.
168	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Şcoala Politehnică Timişoara. Director al Soc. A. E. G. Bucureşti. — B-dul T. Ionescu, 22, Bucureşti 1.
169	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-Industrial. Absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul General al fabricei de hârtie „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
170	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Constructori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6.
171	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor (r) de Marină. — Şef Bibliotecar Technic Uzinele Malaxa. — Str. Dr. C. Gr. Romniceanu 7. Etaj 1. Tel 5.32.12.
172	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
173	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Odesa, 39. Bucureşti 2.
174	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Paris, 14. Bucureşti 3.
175	1944, Mai 8	NOVACU VALER. Licenţiat în Matematici. Doctor în fizică. — Şef de lucrări la Facultatea de Ştiinţe din Timişoara. — Bd. Diaconovici Loga 1 A. Timişoara.
176	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
177	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer-Inspector general Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti Secţia Electro-Mecanică. — Sub-Director Docurile Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
178	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar titular la Politehnica din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfinţii Voievozi, 9. Bucureşti 2.
179	1910, Mai 21	ORĂŞEANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.

180	1942, Aug. 27	PANAITE N. THEODOR. Căpitan, Inginer S. S. T. A. A. — Str. Neagoe Basarab, 26. Vila Florian. Braşov.
181	1929, Ian. 21	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Statistician-expert. – Profesor Politehnica Bucureşti. Profesor la Şcoala de Statistică. Inspector General actuar la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Brezoianu, 38 bis. Bucureşti. (Telefon 3-4305).
182	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Istrate, 44. Bucureşti 5. (Telefon 4-6329).
183	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici. — Sub-Director în Direcţia Generală a Monitorului Oficial. — Splaiul Independenţei, 56. Bucureşti.
184	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica Bucureşti. — Str. Dr. Severeanu, 26. Bucureşti 6.
185	1941, Iunie 5	PERLEA G. DAN. Inginer C. F. R. — Str. Dr. Severeanu, 8. Bucureşti 6.
186	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica Bucureşti. — Calea Victoriei, 159. Bucureşti.
187	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Matematici. — Asistent la Observatorul din Bucureşti. — Str. Tutunari, 38. Bucureşti 6.
188	1940, Aug 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie.—Str. Roma (Intrarea Roma, 5). Bucureşti 3.
189	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
190	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Maior activ de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor de Matematici la diferite Şcoli Militare din Bucureşti. — Str. Dr. C. Severeanu, 23. Bucureşti 6.
191	1935, Apr. 10	POPESCU A. VICTOR. Inginer — Director la Soc. Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Conferenţiar Politehnica Bucureşti. — Str. Comand. E. Botez, 12. Bucureşti 3.
192	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer electromecanic. — Director al Fabricei de motoare de aviaţie I. A. R.— Str. N. Iorga, 14. Braşov.
193	1944, Febr. 16	POPESCU-ZORICA AL. Licenţiat în Matematici al Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti pe lângă catedra de Algebră Superioară şi Calculul Probabilităţilor. — Str. Dr. N. Staicovici 21. Bucureşti.
194	1944, Febr. 9	POPOVICI CONST. Inginer în Serv. Construcţiilor şi Instalaţiilor C. A. M. — Piaţa Lahovari 1 A. Bucureşti.
195	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Lăţescu, 22. Iaşi.
196	1931, Mart. 11	POPP N. Comandor. Inginer. — Subsecretariatul de Stat al Aerului. — Str. Viitor, 16. Bucureşti 3.

197	1927, Mai 11	POPP I. TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Colegiul Naţional „Sf. Sava". Inspector general didactic, Min. Apărării Naţionale. — Str. Clucerului, 10. Bucureşti 2.
198	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor.— B-dul Basarab (Alee) 9. Bucureşti 2.
199	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Divizie. Comandantul Corpului II Teritorial. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
200	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. — Consilier Controlor la Inalta Curte de Conturi. — Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
201	1944, Febr. 9	PROFIRI N. Inginer Inspector general. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. – B-dul Elisabeta 24. Bucureşti.
202	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. General din Rezerva Artileriei. — Consilier Technic pentru armament la Creditul Naţional Industrial. — B-dul Lascăr Catargiu, 16. Bucureşti 3.
203	1941, Iunie 5	PROVINCEANU MIHAIL. Inginer electromecanic. Diplomat al Şc. Politehnice Bucureşti şi Şcoala Superioară de Electricitate Paris. — Inginer la Soc. de Gaz şi Electricitate. — Parcul Jianu. Str. Q, 24. Bucureşti.
204	1941, Febr. 20	RĂDULESCU I. MIRCEA. Inginer constructor.—Diplomat al Şcoalei Politehnice. Şef de secţie în Direcţiunea Podurilor C. F. R. Secţia I Poduri C. F. R. Sinaia.
205	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Consilier în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti.
206	1943, Febr. 18	ROMAŞCAN GEORGETA. Inginer constructor. Licenţiată în Matematici. Inginer referent la Consiliul Tehnic Superior. — Str. Romană, 182. Bucureşti 3.
207	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în drept. Doctor în ştiinţele Politico-Economice. — Ad-tor financiar de Constatare Indirecte. Sect. 4 Verde. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
208	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer, Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
209	1941, Febr. 20	RUZVAN I. THEODOR. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer Direcţia Podurilor C. F. R. — Bd. G-ral Traian Moşoiu, 11. Bucureşti 5.
210	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Subdirector General la Monitorului Oficial şi Imprimeriile Statului. — Cartierul C. A. M. Filaret Str. B. 28. Bucureşti 6.
211	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
212	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer Constructor. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5 (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.

213	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer-Şef. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
214	1944, Febr. 16	SAUR I. Inginer electromecanic. — Inginer Soc. Seta Sibiu. Subdirector Ministerul Afaceri Interne. — Str. Ion Maiorescu, 47. Bucureşti.
215	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Căpitan. Licenţiat în Matematici. — Str. Dr. Severeanu, 35. Bucureşti 3.
216	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Director P. T. T. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti.
217	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul Tehnic Superior. — Str. Paleologul, 3 bis. Bucureşti 4.
218	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor la Universitatea din Cluj. Membru corespondent al Academiei Române — Str. Milano, 12. Timişoara.
219	1921, Febr. 6	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Şos. Kiseleff 25. Bucureşti 2.
220	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Inspector în învăţământul secundar. — B-dul Pache, 99. Corp. VI. Bucureşti.
221	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer constructor. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. Inginer la S. T. B. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti 3.
222	1941, Iunie 5	ŞLEAHTENEA DUMITRU. Inginer constructor. Diplomat Şcoala Politehnică Bucureşti 928. — Soc. Comunală Locuinţe ieftine Bucureşti. — Parcul Ianculul II. Str. Gabrielescu, 5. Bucureşti.
223	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General cl. I în Corpul Tehnic. Subdirector General în Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
224	1943, Febr. 18	STAMATE I. IONEL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Liceul Militar Timişoara.
225	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Subdirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
226	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
227	1938, Febr. 17	STAN I. AURELIAN. Căpitan. Inginer Diplomat S. P. Buc. Licenţiat în Matematici. Membru corespondent al Acad. Ştiinţe din România. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei dela Fontainebleau. — Str. Atena, 3. Bucureşti 1.
228	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
229	1941, Febr. 20	STANCU S. MARIN. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer, Secţia I Poduri C. F. R. — Staţia Ploeşti-Triaj.

230	1941, Iunie 5	STANCU S. MIRCEA. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Şef de Şantiere la Soc. Comunală de Locuinţe ieftine, Bucureşti. — Calea Şerban Vodă, 272. Bucureşti.
231	1943, Aug. 26	STĂNCULESCU I. ION. Inginer constructor. — Inginer în Adm. Com. P. C. A. Asistent suplinitor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Romană 182. Bucureşti.
232	1943, Febr. 18	STĂNCULESCU ROMAŞCAN GEORGETA. Inginer Constructor. — Inginer în M. L. P. C. — Str. Romană 182, Bucureşti.
233	1941, Aug. 28	ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE. Sublocotenent. Ofiţer de Transmisiuni. Instructor la Şcoala de Ofiţeri de Transmisiuni. — Str. Popp de Băseşti, 52. Bucureşti 4.
234	1941, Iunie 5	ŞTEFĂNESCU-GOANGĂ AUREL. Inginer ord. clasa II, Politehnica Bucureşti, construcţii. Sublocotenent de rezervă A. C. A. — Inginer în Serviciul construcţiilor şi instalaţiilor C. A. M. Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă la Politehnica Bucureşti. — Parcul Ianculuí, Str. Lt. Ionescu Anton, 27. Bucureşti 4.
235	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R.. — Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
236	1943, Febr. 18	STOICA D. ALEXANDRU. Inginer diplomat al Politehnicei din Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
237	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Directorul Societăţii Comunale pentru Construirea de Locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
238	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Lic. Industrial băieţi, Buzău.
239	1941, Iunie 5	STOIKA VICTOR. Inginer Inspector General. — Preşedintele Consiliului de Administraţie C. F. R. — Str. Paris, 12. Bucureşti 3
240	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
241	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Doctor Inginer mecanic. — Profesor de Radio-Comunicaţii la Politehnica din Bucureşti. — Str. Cazărmei, 52. Aleea Bagdad, 5. Bucureşti 6.
242	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Profesor onorar. Pensionar. — Str. Zlataust, 7. Iaşi.
243	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Rector al Politehnicei din Bucureşti.
244	1937, Ian. 28	THEODORU G. HENRI. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Antreprenor. — Str. Alex. Donici, 27. Telef. 2.37.89. Bucureşti 3.
245	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Str. Basarabia, 12. Bucureşti 2.
246	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.

247	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION. Inginer Diplomat. Doctor-Inginer, Şcoala Politehnică Berlin-Charlottenburg. — Inginer la S. S. A. — Profesor la Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie şi la Şcoala de Sub-Ingineri. — Str. Leova, 42. Bucureşti 4.
248	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3.
249	1939, Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în Fizică. Licenţiat în Matematici, Inginer. — Profesor la Labor. Optică, Facultatea de Ştiinţe din Cluj-Timişoara. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3.
250	1941, Febr. 20	ŢIŢEICA ŞERBAN. Licenţiat în matematici, licenţiat în ştiinţe fizico-chimice, doctor în ştiinţe. — Str. Vovidenie, 23. Iaşi.
251	1936, Febr 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti 3.
252	1944, Feb. 9	TUDORAN MIHAIL. Inginer Inspector general din C. F. R. — Str. Maramureş 2. Bucureşti.
253	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer Inspector General. — Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Aviator Theodor Iliescu, 69. Bucureşti 3.
254	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6.
255	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice şi Mecanice. — Profesor de Mecanică la Universitatea din Bucureşti. Director al Institutului de Aerodinamică. — Str. Odesa, 44. Bucureşti 3.
256	1914, Dec. 20	VARDALA ION. Inginer Inspector General. — Preşedintele Comitetului de Direcţie P. C. A. şi al Consiliului Superior al Apelor. — Str. Wilson, 15. Bucureşti 1.
257	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General. — Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial Nr. 1. — Str. Viitorului, 48. Bucureşti 3.
258	1932, Mart. 26	VASILESCU GR., Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Subdirector în Direcţia Generală a Porturilor şi a Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Str. Brezoianu, 27. Bucureşti 1.
259	1920. Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef. — Str. Popovici, 22. Bucureşti, 2.
260	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer constructor.
261	1944, Febr. 9	VASILESCU STABU AL. MIRCEA. Sublocotenent din artilerie. — Str. Iancu Căpitanul 35. Bucureşti.
262	1931, Apr. 10	VASILIU G. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Director la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. N. Bălcescu, 17. Bucureşti.
263	1941, Febr. 20	VASILIU C. EUGENIU. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Antreprenor de Lucrări publice şi particulare. — Str. Vornicul Mogoş, 6. Bucureşti 4.
264	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. — Parc. Voevod Mihai, 14. Câmpina.

265	1941, Febr. 20	VASILIU C. ION. Inginer constructor S. P. B. — Subşeful Serviciului Construcţiilor în Direcţia rectificării — Str. Roger Nanu, 5. Piatra-N.
266	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 1.
267	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Cluj, Banca Albina.
268	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar Mihai Viteazul din Tg.-Mureş. — Str. Mărăşeşti, 12. Timişoara 1.
269	1944, Febr. 9	VIŞA EUGEN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Colegiul Naţional Sf. Sava. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti.
270	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Calea Moşilor, 133. Bucureşti 3.
271	1941, Iunie 5	ZAMFIRESCU GH. ION. Căpitan de Artilerie. — Inginer Minist. Înzestrării Armatei Direcţia Tehnică. — Bd. Elisabeta, 97. Bucureşti 2.
272	1929, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Directorul Institutului Politehnic din Bucureşti. Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6.
273	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Comandor. Inginer în Subsecretariatul de Stat al Aerului. Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E.N.S.A. Paris). — Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6. (Telefon 4-3929).
274	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich. — Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI *)

	Data admiterii	Data morţii
1. ABASON E.	1922 Martie 1	1942 Dec. 17
2. ANGELESCU A.	1919 Septemvrie 12	1938 Apr. 6
3. BANCIU I.	1911 Februarie 20	1940 Sept. 16
4. BOTEA N.	1932 Aprilie 20	1937 Dec. 18
5. BOTEZ ST. MIHAIL	1935 August 22	1944 Ianuarie
6. BRATU GH.	1920 August 15	1941 Sept. 1
7. BUNGEŢIANU D. PREDUŢA	1938 Februarie 27	1940 August 21
8. BUŞILĂ G. ION	1921 Mai 4	1944 Martie 10
9. FILIPESCU E. G.	1909 Iulie 1	1937 Noembrie 24
10. FUNDĂŢEANU C. I.	1928 Mai 9	1940 Sept. 23
11. IOACHIMESCU GH. ANDREI	1895 Septemvrie 15	1943 Martie 13
12. PANAITESCU SC.	1914 Decemvrie 20	1938 Martie 22
13. SERGESCU BARBU	1928 August 29	1944 Iulie 29
14. TEODORESCU V. N.	1911 Mai 18	1943 Ianuarie 23
15. ŢIŢEICA GH.	1895 Noemvrie 1	1939 Februarie 5
16. ZAMFIRESCU C. GRIGORE	1924 Ianuarie 30	1943 Iunie 8

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*“ până la sfârşitul vieţii lor.

PREMIILE, BURSELE ŞI PUBLICAŢIILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

I. **Premii.** In cursul anului XLIX de apariţie a *Gazetei* (anul şcolar 1943—1944) situaţia premiilor anunţate ca disponibile în Nr. 1 (Septembrie 1943), a fost următoarea:

1. *Premiul de aritmetică*, în valoare de lei 5.000, a fost acordat elevului VASILIU G. DUMITRU din clasa a VIII-a Liceul Militar din Iaşi, în baza raportului publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, Nr. 7, pag. 425—426.

2. *Premiul de geometrie elementară* « G. ŢIŢEICA », în valoare de lei 5.000, nu s'a acordat din lipsă de candidaţi, după cum rezultă din raportul aprobat de Adunarea generală din Februarie 1944.

3. *Premiul de algebră* « A. G. IOACHIMESCU », nu s'a acordat din lipsă de corespondenţi cu activitate îndestulătoare, în conformitate cu raportul publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 9, pag. 563.

4. *Premiul de trigonometrie* « V. CRISTESCU », nu s'a acordat anul acesta, conform raportului publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 10, pag. 604—605.

5. *Premiul de mecanică şi astronomie* « SPIRU HARET », din lipsă de candidaţi, nu s'a acordat după cum reiese din raportul prezentat spre aprobare Adunării generale dela 28 August 1944.

6. *Premiul de filosofia matematicilor* « VASILE CONTA », în valoare de lei 4.000, n'a fost atribuit nici în anul acesta, din lipsă de lucrări, cum arată raportul publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 3, pag. 163.

7. *Premiul de matematici superioare pure sau aplicate* « ING. H. CAPRIEL «, în valoare de 1.000 lei nu s'a acordat din lipsă de lucrări, potrivit raportului ce se prezintă spre aprobare Adunării generale dela 28 August 1944. Raportul se va publica în Nr. 2 din Octombrie 1944.

8. *Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare* « GENERAL SC. PANAITESCU ». Cu anul acesta suntem în

anul al II-lea din perioada de 5 ani, la sfârşitul căreia se va acorda un premiu cu acest nume. Conform raportului ce se publică în numărul de faţă se va ţine seama pentru premiere şi de acest raport.

9. *Premiul* « LT.-COL. GH. TĂNĂSESCU », nu s'a acordat anul acesta deoarece din cauza războiului, concursul n'a mai avut loc.

10. *Premiul de geometria triunghiului şi tetraedrului* « NICOLAE G. BOTEA », a fost decernat elevului P. P. DRĂGHICESCU, elev în Şcoala de Ofiţeri de Geniu; raportul de premiere se găseşte publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 5, Vol. XLIX, pag. 288—289.

11. *Premiul anual* « ING. AL. ROŞU », a fost dat anul acesta D-lui VASILIU GH. DUMITRU, din clasa a VIII-a Liceul Militar din Iaşi. Raportul de premiere a fost publicat în *Gazeta Matematică*, Nr. 8, Vol. XLIX, pag. 498—499.

* * *

Pentru anul L al Gazetei (anul şcolar 1944—1945), în conformitate cu regulamentele ce se pot cumpăra dela *Gazeta Matematică*, se vor putea acorda următoarele premii:

1. *Premiul anual de aritmetică*, de 5.000 lei.

2. *Premiul anual de geometrie elementară* « G. ŢIŢEICA ». Pentru acest premiu Societatea *Gazeta Matematică* dispune anul acesta de 10.000 lei din care se vor putea decerna fie un singur premiu de această valoare, fie 1—2 premii de câte 5.000 lei.

3. *Premiul anual de algebră* « A. G. IOACHIMESCU ». Din cei 15.000 lei disponibili anul acesta, se va putea atribui un singur premiu de această valoare sau 1—3 premii de câte cel puţin 5.000 lei.

4. *Premiul anual de trigonometrie* « VASILE CRISTESCU », pentru care s'au adunat în total 25.000 lei se va putea acorda un premiu pentru întreaga sumă sau 1—5 premii de câte cel puţin 5.000 lei fiecare.

5. *Premiul anual de mecanică sau astronomie* « SPIRU HARET », dispune anul acesta de 15.000 lei din care se va putea acorda fie un premiu de această valoare, fie 1—3 premii de câte cel puţin 5.000 lei.

6. *Premiul anual de filosofia matematicilor* « VASILE CONTA », pentru care Societatea dispune de 20.000 lei se va putea decerna fie un singur premiu pentru întreaga sumă, fie 1—5 premii de câte cel puţin 4.000 lei.

7. *Premiul anual* « LT.-COL. A. TĂNĂSESCU », constând din cărţi de matematici cumpărate din venitul fondului cu acest nume, este destinat premiului clasificat la concursul anual al Gazetei.

8. *Premiul anual de geometria triunghiului şi tetraedrului* « NICOLAE GH. BOTEA », din venitul fondului cu acest nume.

9. *Premiul anual* « ING. AL. ROŞU », din venitul fondului respectiv, destinat celui mai harnic corespondent al volumului XLIX.

II. **Burse.** Din venitul fondului « PROFESOR ION IONESCU », nu s'a acordat în anul şcolar 1942—1943 şi 1943—1944 nicio bursă, din lipsă de candidaţi.

Conform regulamentului, venitul rămas disponibil, el se va adăoga la venitul din anul ce începe şi va servi pentru acordarea de burse în anul şcolar 1944—1945.

Din venitul fondului « ING. GH. EM. FILIPESCU », s'a acordat în anul şcolar 1943—1944, o bursă lunară de lei 4.000, D-lui ŞEIBULESCU C., elev inginer anul V, Construcţii dela Politehnică din Bucureşti.

III. **Publicaţii.** In biblioteca tehnică a *Gazetei Matematice*, căreia îi sunt destinate veniturile fondului « ANGHEL SALIGNY », nu s'a făcut nicio publicaţie anul acesta.

Din disponibilităţile curente ale Societăţii *Gazeta Matematică*, s'a tipărit: Trigonometria plană şi sferică de D-l Profesor M. GHERMĂNESCU.

— Se află sub tipar: Culegere de probleme de geometrie analitică, de « G. ŢIŢEICA », partea II-a, care va apare sub îngrijirea D-lui Profesor C. IONESCU-BUJOR. Lucrarea a fost pregătită în parte, de regretatul N. G. BOTEA.

Va urma: partea III-a, Curbe plane şi
partea IV-a, Geometrie în spaţiu.

COMISIUNEA PENTRU ADMINISTRAREA FONDURILOR SPECIALE ALE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ"

AL. AL. ROŞU, ING. D. A. STAN.

ASUPRA UNEI CHESTIUNI DE EXAMEN

Résumé. On présente sous plusieurs aspects une question proposée à un examen: Trouver les surfaces dont la portion de la normale comprise entre le point de contact M et le point d'intersection de celle-ci avec le plan xOy, soit égale à $\overline{ON}$. On étudie plusieurs propriétés en relation avec cette question.

La examenul scris de Analiză matematică partea a II-a, ţinut la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti în Iunie 1926, între altele, s'a propus şi următoarea chestiune:

Să se determine suprafeţele pentru cari porţiunea $\overline{MN}$ *a normalei, cuprinsă între punctul* M *şi planul* xOy *este* $\overline{MN} = \overline{ON}$.

In cele ce urmează ne propunem să menţionăm mai multe alte aspecte ale acestei probleme şi să facem şi unele observaţiuni în legătură cu ea.

1°. Rezolvarea sumară a ei este următoarea:

Ecuaţia suprafeţei căutate fiind $z = f(x, y)$, ecuaţiile normalei în M sunt

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

iar coordonatele punctului N:

$$Z = 0$$

$$Y = y + qz$$

$$X = x + pz.$$

Relaţia din enunţ devine deci ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale lineară:

$$2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2. \tag{1}$$

Ea ne procură sistemul:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}. \tag{2}$$

Din primele două ecuaţii avem:

$$\frac{y}{x} = c_1. \tag{3}$$

Mai scriem sistemul propus sub forma

$$(4)\qquad \frac{xdx}{2x^2}=\frac{ydy}{2y^2}=\frac{zdz}{z^2-x^2-y^2}=\frac{\frac{1}{2}\,d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Primul şi ultimul raport ne procură o ecuaţie care integrată ne va da

$$(5)\qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{x}=c_2.$$

Integrala generală a ecuaţiei (1) este deci:

$$(6)\qquad (x^2+y^2+z^2)-x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

Observaţiunea 1-a. De sigur că putem lua şi

$$(3')\qquad \frac{x}{y}=k_1,$$

iar din (4) să tragem

$$(4')\qquad \frac{dx+dy}{x+y}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$(5')\qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y}=k_2$$

astfel încât integrala generală a ecuaţiei (4) apare sub forma

$$(6')\qquad x^2+y^2+z^2-(x+y).\psi\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

dar această soluţie este tot soluţia (6); într'adevăr avem:

$$x^2+y^2+z^2-x\left(1+\frac{y}{x}\right).\psi\left(\frac{1}{\frac{x}{y}}\right)=x^2+y^2+z^2-x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

2°. In vechea carte „*Cours d'Analyse de l'École polytechnique*“ de CH. STURM, vol. II, pag. 191, sub nr. 2, se găseşte următorul exerciţiu:

Să se determine o suprafaţă astfel încât planul tangent dus printr'un punct oarecare M să întâlnească o dreaptă dată ca poziţie într'un punct care să fie egal depărtat de punctul M al suprafeţei şi de un punct fix luat pe dreapta dată.

Vom arăta că acest exerciţiu este o altă formă sub care se poate înfăţişa chestiunea de examen de care ne ocupăm. Exerciţiul se rezolvă astfel:

Dreapta dată se ia ca axă $z'z$ iar punctul fix de pe ea ca origina O a sistemului. Fie P punctul în care planul tangent în M la suprafaţă taie dreapta. Ecuaţiunea acestui plan tangent fiind

$$(X - x)\,p + (Y - y)\,q - (Z - z) = 0,$$

şi ca atare coordonatele punctului P fiind

$$X = Y = 0$$

$$Z = z - px - qy,$$

relaţiunea $\overline{MP} = \overline{OP}$ se traduce analiticeşte astfel

$$(1') \qquad x^2 + y^2 + (px + qy)^2 = (z - px - qy)^2$$

adică ecuaţiunea diferenţială (1), cu soluţiunea (6).

Dar se putea vedea în prealabil că avem de-a-face cu aceeaşi problemă; într'adevăr:

$$\sphericalangle PMN = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle PON = \frac{\pi}{2},$$

deci punctele M, N, O, P sunt pe sfera descrisă pe $\overline{NP}$ ca diametru. Ca atare $\overline{MP} = \overline{OP}$ atrage $\overline{MN} = \overline{ON}$.

Observaţiunea a 2-a. Să cercetăm acum ce se întâmplă în cazul când punctele M, N, O, P sunt coplanare sau cu alte cuvinte în fiecare punct al suprafeţei există o secţiune normală care să conţie axul $z'z$. Trebue să avem relaţia

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x + pz & y + qz & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z - px - qy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

sau

$$(8) \qquad z(yp - xq)(z - px - qy) = 0;$$

adică trebue să avem separat, parte din ele sau simultan, relaţiunile:

(9) $z = 0$

(10) $z - px - qy = 0$

(11) $yp - xq = 0,$

din cari deducem respectiv prin integraţiuni simple:

(10′) $z = x \cdot f_1\left(\frac{y}{x}\right)$

(11′) $z = f_2(z^2 + y^2).$

Conchidem că în acest caz particular suprafeţele căutate sunt: sau planul xOy, sau suprafeţe conice cu vârful în O, sau suprafeţe de rotaţie cu axul vertical $z'z$.

Este lesne însă de verificat geometriceşte că pentru suprafaţa $z = 0$ proprietatea $\overline{MN} = \overline{ON}$ (sau proprietatea $\overline{MP} = \overline{OP}$) nu sunt valabile decât în cazul când M se confundă cu O; de asemenea şi la suprafeţele conice. Acest lucru se poate vedea şi după integrala generală (6). Vom exclude deci posibilitatea de a fi $z = f(x, y)$ astfel de suprafeţe. Tot geometriceşte se poate vedea că e posibil ca integrala generală (6) să reprezinte nişte suprafeţe de rotaţie de ax $z'z$. Să ne propunem a determina funcţiunea φ astfel încât suprafeţele să fie asemenea suprafeţe de rotaţie. Conform teoriei trebue să eliminăm pe x, y, z între relaţiunile

$$\frac{y}{x} = c_1$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = c_2$$

(12) $x^2 + y^2 = a^2$

(13) $z = b.$

Deducem succesiv:

$$\frac{a^2 + b^2}{x} = c_2 \quad ; \quad \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{c_1^2 + 1}{1} \quad ; \quad \frac{a}{x} = \pm\sqrt{c_1^2 + 1}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{x} \cdot \frac{x}{a} = \frac{c_2}{\pm\sqrt{c_1^2 + 1}}$$

(14) $$c_2 = \pm \frac{(a^2 + b^2)\sqrt{c_1^2 + 1}}{a}.$$

Suprafaţa particulară căutată este deci

$$(15) \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{x} = \pm\frac{a^2+b^2}{a}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Ecuaţia (15) reprezintă o suprafaţă de rotaţie în jurul axului $z'z$, anume un tor care conţine origina ca punct dublu iar după forma ei, această ecuaţie este cuprinsă în integrala generală (6).

3°. Iată acum încă un nou aspect al chestiunii de examen dela care am plecat:

Să se găsească suprafeţele astfel încât pentru fiecare punct M, planul perpendicular pe mijlocul segmentului $\overline{OM}$ să treacă prin N, acesta fiind punctul în care normala în M înţeapă planul xOy.

Ecuaţiile dreptei OM sunt

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Ecuaţia planului perpendicular pe mijlocul lui $\overline{OM}$ este

$$x\left(X-\frac{x}{2}\right)+y\left(Y-\frac{y}{2}\right)+z\left(Z-\frac{z}{2}\right)=0.$$

Impunând acestui plan obligaţia de a trece prin punctul $N(x+pz, y+qz, 0)$ vom avea

$$(1'') \qquad x\left(\frac{x}{2}+pz\right)+y\left(\frac{y}{2}+qz\right)-\frac{z^2}{2}=0,$$

o ecuaţie diferenţială care simplificată devine chiar ecuaţia (1) cu integrala generală (6).

4°. Ne propunem acum să determinăm acea suprafaţă din familia (6) care să treacă prin cercul

$$(16) \qquad x^2+y^2+mx+ny=0.$$

$$(17) \qquad z=0.$$

Alăturăm acestor ecuaţii relaţiunile

$$(3) \qquad \frac{y}{x}=c,$$

$$(5) \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{x}=c_2$$

şi facem eliminarea lui x, y, z între aceste patru ecuaţiuni obţinând astfel relaţia care leagă între ele constantele c_1, c_2. Se obţine

$$\frac{x^2+y^2}{x} = c_2 \tag{5'}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1}{1}\,;\ \frac{ny}{mx} = \frac{nc_1}{m}\,;\ \frac{mx+ny}{mx} = \frac{m+nc_1}{m}$$

$$\frac{mx+ny}{x} = m+nc_1. \tag{3'}$$

Prin adunarea parte cu parte a relaţiunilor (3') şi (5') vom găsi

$$\frac{x^2+y^2+mx+ny}{x} = m+nc_1+c_2.$$

Deci relaţiunea dintre constantele c_1, c_2 este

$$m+nc_1+c_2 = 0. \tag{18}$$

Suprafaţa particulară căutată va fi deci

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x} + n\frac{y}{x} + m = 0$$

$$x^2+y^2+z^2+mx+ny = 0. \tag{19}$$

Această ecuaţie reprezintă o sferă cu centrul în planul xOy şi trecând prin origină. *Aci rezidă ideea iniţială a tuturor problemelor dela paragrafele* 1°, 2° *şi* 3°. *Faţă de această sferă, proprietăţile expuse la aceste paragrafe sunt evidente. Suprafeţele* (6) *generalizează sfera* (19).

5°. Să dăm o particularizare în plan problemei dela punctul 1°, propunându-ne a determina curbele dintr'un plan xOy pentru cari să avem porţiunea de normală $\overline{MN} = \overline{ON}$.

Coordonatele lui N fiind $(x+yy', 0)$ iar ale lui M, (x, y), vom avea

$$y^2y'^2 + y^2 = (x+yy')^2 \tag{20}$$

$$(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0, \tag{21}$$

ecuaţia diferenţială de primul ordin, omogenă, care se integrează uşor după metoda obişnuită făcând substituţia $y = tx$, în urma căreia variabilele se separă. Să întrebuinţăm însă pentru găsirea

soluţiei aceeaşi metodă a combinaţiunilor integrabile folosită pentru ecuaţia (1). Vom avea:

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2} = \frac{xdx}{2x^2} = \frac{ydy}{y^2 - x^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}.$$

Raportul al 3-lea şi ultimul dau

$$x^2 + y^2 - Cx = 0, \tag{23}$$

o familie de cercuri cu centrele pe $x'x$ şi trecând prin origină, la cari proprietatea $\overline{MN} = \overline{ON}$ este evidentă.

Observăm că în plan, termenul z a dispărut iar constanta arbitrară C a luat locul funcţiunii arbitrare φ.

VIRGIL GHIŢESCU.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SCARLAT PANAITESCU"

Subsemnaţii, membri în comisiunea de premiere, pentru premiul « GENERAL PANAITESCU SCARLAT », cercetând lucrările de matematici cu aplicaţie la ştiinţele militare, apărute în anul 1943, precum şi diferitele reviste de specialitate, propunem ca pentru anul 1943, să se ia în consideraţie revista lunară *„Technica şi Viaţa"*.

Aceasta deoarece:

1. Această revistă apare sub îngrijirea unui comitet de redacţie compus din ingineri şi al cărui preşedinte este distinsul nostru coleg inginer NICOLAE CARANFIL.

Deci competinţa şi ţinuta tehnică este perfect asigurată.

2. Revista se găseşte în al treilea an de existenţă şi a avut o apariţie regulată cu toate condiţiile grele în care de obiceiu se poate menţine o revistă tehnică.

In acest an, de asemenea a apărut regulat cu toată vitregia bombardamentelor aeriene.

3. Revista, în cei trei ani de apariţie a publicat o serie de interesante articole de matematici cu aplicaţie la Ştiinţele Militare.

De altfel în zilele noastre ştiinţa militară a evoluat pentrucă războiul înafară de arme de tot felul, întrebuinţează pentru nevoile sale toate resursele naţiunii şi tot ce mintea omului a făurit pentru nevoile populaţiei: autovehicule şi avioane în cantităţi imense, deci carburanţi şi combustibil, căi ferate şi drumuri, resurse naturale sau surogate precum şi produse ale solului şi subsolului.

Şi cu aceste probleme s'a ocupat revista „*Technica şi Viaţa*“ studiind evident, în deosebi, cele care sunt aplicabile Ţării noastre.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „SCARLAT PANAITESCU“

ING. AL. BUNESCU, MAIOR ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE, CĂPITAN AURELIAN STAN.

Acest raport a fost citit şi aprobat în Adunarea Generală de la 21 August 1944.

NOTE MATEMATICE

1. *Notă asupra egalităţilor multigrade.* D-l RIGNAUX dă în revista „*Sphinx*“ următoarea teoremă:

Fie multigrada

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1} \overset{n}{=} b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1},$$

iar

$$r = \frac{2S_1}{n+1}.$$

După cum n *este par sau impar avem una din multigradele:*

$$r - a_1,\ r - a_2,\ \ldots,\ r - a_{n+1},\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1} \overset{n+3}{=}$$

$$r - b_1,\ r - b_2,\ r - b_3,\ \ldots,\ r - b_{n+1},\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1}$$

$$r - b_1,\ r - b_2,\ \ldots,\ r - b_{n+1},\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1} \overset{n+3}{=}$$

$$r - a_1,\ r - a_2,\ \ldots,\ r - a_{n+1},\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n+1}.$$

Pe de altă parte soluţiile multigradei bigrade

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \overset{2}{=} b_1,\ b_2,\ b_3 \qquad (1)$$

sunt date de:

$$\begin{aligned} a_1 &= AD = t & b_1 &= AD + BG + t \\ a_2 &= AG + BD + t & b_2 &= BD + t \\ a_3 &= BG + t & b_3 &= AG + t \end{aligned} \qquad (2)$$

(Dikson Bodewig — Einführung in die Zahlentheorie — pag. 46).

Aplicând teorema de mai sus multigradei (1) găsim o soluţie parametrică a multigradei:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6 \overset{5}{=} \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6$$

$$\alpha_i = a_i \qquad \beta_i = b_i \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

$$\alpha_i = 2k + 2t - a_{i-3} \qquad \beta_i = 2k + 2t - b_{i-3} \qquad i = 4,\ 5,\ 6$$

a_i, b_i fiind date de relaţiile (2), iar

$$3k = (A + B)\ (D + G).$$

P. P. DRĂGHICESCU.

2. *Asupra problemei 3341.* Iată o altă soluţie a acestei probleme, publicată la pag. 573, Vol. XLIX.

Funcţia indicatoare este $\varphi(N)$, iar funcţia care dă numărul numerelor prime, mai mici ca N, este:

$$\psi(N) = n + I_N\,[2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (\sqrt{N})]$$

unde n este numărul factorilor primi a lui N, iar $I_N(x)$ numărul numerelor prime cu x din şirul primelor N numere, în paranteză având produsul tuturor numerelor prime până la $\sqrt{N}$.

Trebue deci să avem:

$$(1) \qquad \varphi(N) \leqslant \psi(N)$$

Iar pentru ca numerele mai mici ca N şi prim cu el să fie şi numere prime, trebue neapărat ca N să cuprindă toţi factorii primi începând dela 2 la $(\sqrt{N})$.

Deci:

$$(2) \qquad N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \ldots (\sqrt{N})^{\lambda}.$$

Rezultă dar că trebue să avem:

(3) $$\varphi(N) = I_N\,[2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (\sqrt{N})].$$

Deci condiţia (1) este satisfăcută.

Examinând numerele cari satisfac condiţia (2), vom nota:

$N = l^2 + x$ unde $l = (\sqrt{N})$, deci: $0 \leqslant x < m^2 - l^2$,

unde m este numărul prim imediat superior lui l. Cu aceasta, condiţia (2) devine:

$$N = l^2 + x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\lambda \ldots l^\lambda$$

sau:

$$l^2 \leqslant 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \ldots l^\lambda < m^2.$$

Se vede dar bine că pentru $l > 5$ şi în cel mai bun caz, când $\alpha = \beta = \gamma = \ldots \lambda = 1$, avem:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots l > m^2$$

deoarece: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 11^2$; apoi: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 11^3$, iar $11^3 > 13^2$, căci ştim că dacă p şi q sunt două numere prime consecutive unde $p < q$, atunci $p^3 > q^2$ (o problemă în G. M.).

Pentru $l \leqslant 5$ avem:

l	2	3	5
N	2^α	$2^\alpha \cdot 3^\beta$	$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$
	4, 8	6, 12, 18, 24	30

Observaţie. D-l I. B. Florescu a demonstrat în XXXIV — 90 că: *„Intre a* şi $(3a+1)$ *se găsesc cel puţin două numere prime"*.

Intr'o serie de lucrări am arătat că între patratele a două numere consecutive se găsesc cel puţin două numere prime, interval mai mic decât cel de mai sus.

C-dor I. Linteş.

3. *Asupra unei omologii plane.* 1°. Fie un sistem de coordonate triliniare definit de triunghiul ABC şi punctul M din planul său.

Omografia

$$x' = y + z \quad , \quad y' = z + x \quad , \quad z' = x + y$$

transformă triunghiul ABC în A'B'C', pedalul de ordinul I al punctului M, pe A'B'C' în A"B"C", pedalul de ordinul II al acestui punct, etc.

Ecuația în S a omografiei este

$$S^3 - 3S + 2 = 0$$

și admite rădăcina dublă -1, deci omografia este o omologie.

Centrul de omologie este punctul M, iar axa de omologie este

$$x + y + z = 0,$$

polara triliniară a punctului M în raport cu ABC.

Această omologie transformă un punct P (x_0, y_0, z_0) în P′ $(y_0 + z_0, z_0 + x_0, x_0 + y_0)$.

In cazul particular, când $M \equiv G$, centrul de greutate al triunghiului ABC, coordonatele sunt baricentrice, iar P′ este complementarul lui P.

D-l GR. MOISIL numește, într'un vechiu articol apărut în G. M.[1]), punctul P′, în cazul când M este oarecare, *Complementarul generalizat* al punctului P.

Deci complementarul generalizat al unui punct din planul unui triunghiu nu este decât transformatul omografic în omologia care transformă triunghiul fundamental în triunghiul pedal al unui punct oarecare.

Astfel se evidențiază și identitatea formală a coordonatelor triliniare a complementarului generalizat cu coordonatele baricentice ale complementarului.

2°. Este evidentă coliniaritatea punctelor P, M, P′, iar conica (Γ)

$$xy + yz + zx = 0$$

circumscrisă triunghiului ABC se transformă, prin omologia considerată în

$$(\Gamma') \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0,$$

conică circumscrisă triunghiului A′B′C′ și înscrisă triunghiului ABC.

Când $M \equiv G$, aceste două conice sunt cele două elipse ale lui STEINER în coordonate baricentrice.

Conicele (Γ) și (Γ′) sunt tocmai conicele (Γ_c) și (Γ_i) arătate în articolul citat ca generalizări ale elipselor lui STEINER.

Se vede că sistemul de coordonate folositor permite conservarea formală a ecuațiilor.

C. IONESCU-BUJOR.

---

1) GR. MOISIL: Teoreme asupra triunghiului. G. M. XXIX, p. 281.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXIV. Nr. 6. August 1944. CAIUS IACOB. Despre calculul traiectoriilor bombelor de avion. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXX. Nr. 1. Iaşi. Ianuarie-Martie 1944. I. GH. BOTEZ: † Profesorul I. SIMIONESCU. I. SIMIONESCU: Ştiinţa la Iaşi. C. V. GHEORGHIU: Chimioterapia în lumina noilor cercetări biologice. ION AL. MAXIM: Două mamifere unice ale pământului românesc, Prohyracodon orientale şi Brachydiastematheriúm Transylvanicum. O. MARCU: Grija şi ingrijirea de progenitură la coleoptere. EUGEN A. POPA: Veninurile şerpilor.

România Aeriană. Anul XVIII. Nr. 4—6. Aprilie-Iunie 1944. *România Aeriană:* Oraşe deschise. C-DOR I. LINTEŞ: Avionul de vânătoare Messerschmitt Me 109. LAELIUS POPESCU: JUSTIN GHEORGHIU. ION VALERIU POPA: Un avion în noapte. VALENTIN POPESCU: Sbuciumul şi năzuinţele unui începător. VASILE DAMASCHIN: O armă de elită. Dr. V. CATONA: Poezia cerului. ***: Tipul avioanelor americane care au atacat populaţia noastră. G. BRĂNESCU: Originile aviaţiei. W. CIRANNI: Curs practic pentru construirea aeromodelelor. TR. NIŢESCU: Columbofilia în câteva cuvinte.

N. ABRAMESCU. *Lecţiuni de Geometrie Analitică*[1]), urmate de Introducere elementară în studiul analitic al Geometriilor neeuclidiene şi de Noţiuni elementare de Geometrie vectorială. Ediţia a treia. Editura Universităţii din Cluj. 624 pag. Tipografia Românească Timşoara, 1944.

Lecţiunile de Geometrie Analitică ale D-lui profesor N. ABRAMESCU apar în a treia ediţie. Aceasta constitue un record în literatura ştiinţifică românească şi e proba cea mai evidentă de valoarea cursului, de pe care au învăţat Geometria Analitică mii de tineri români până acum. Cartea cuprinde un material foarte bogat şi complet aşa că e folositoare nu numai studenţilor, ci şi oricărui matematician care are nevoie de informaţii asupra vreunei formule sau curbe speciale. In plus, ediţia de faţă are şi numeroase referinţe istorice foarte preţioase. Incă dela prima ediţie, neuitatul G. ŢIŢEICA scria că această carte *«se caracterizează prin bogăţia materialului, prin amănuntele frumoase şi interesante, care strălucesc ca nişte pietre preţioase... calităţi izvorîte din entusiasm care poate produce entusiasm tinerilor studenţi»*.

Cursul cuprinde Geometria pe o dreaptă, Geometria plană şi Geometria în spaţiu. La geometria plană, după studiul liniei drepte se introduc elementele dela infinit şi cele imaginare, coordonatele trilatere, studiul fascicolelor de drepte. Urmează conicele, studiul general al curbelor plane şi noţiuni asupra transformărilor plane (omografie, involuţie, omotetie, transf. afină, transf. corelative). La geometria în spaţiu, după plan şi dreaptă, se studiază

1) A se vedea şi recenzia făcută de D-l I. IONESCU la pag. 731., Vol. XLIX.

elementele dela infinit şi cele imaginare, coordonatele tetraedrice. Urmează noţiuni adâncite despre studiul curbelor şi al suprafeţelor, despre generarea suprafeţelor, precum şi teoria cuadricelor. Câteva sute de exerciţii, cu soluţiile lor, permit cititorilor să pătrundă în tainele metodelor geometriei analitice. O bibliografie indică 41 de tratate de geometrie analitică.

După această parte a geometriei analitice urmează 74 de pagini în care autorul expune elementele geometriilor neeuclidiene. După noţiunile despre geometria sferică se explică deplasările în geometria clasică euclidiană şi în cea iperbolică. Se face apoi studiul geometriei cayleyene, iar la sfârşit se dau imaginile euclidiene ale geometriei cayleyene.

Tratatul D-lui profesor N. ABRAMESCU se încheie în mod fericit cu expunerea noţiunilor necesare de geometrie vectorială.

După cum se vede din această înşirare sumară de capitole, cartea D-lui ABRAMESCU e un izvor bogat şi preţios de informaţie pentru oricine vrea să pătrundă mai adânc în studiul geometriei. Ea poate aduce cele mai mari foloase studenţilor Facultăţilor de Ştiinţe şi Politehnicelor, cărora le-o recomand călduros.

Adăugăm că apariţia tratatului în foarte bune condiţii tehnice, în aceste timpuri sbuciumate, când liniştea şi viaţa fiecăruia din noi sunt ameninţate atât de des, este o dovadă a elanului către ştiinţă al Neamului Românesc, elan care se luptă cu orice greutăţi şi care face orice jertfe, pentru a menţine aprinsă făclia ştiinţei senine. Această strădanie spre menţinerea valorilor spirituale e poate singura mângâiere a zilelor grele ; îi suntem recunoscători D-lui profesor N. ABRAMESCU şi din această cauză, pentru sufletul ce a cheltuit ca să publice noua ediţie a *Lecţiunilor sale de Geometrie Analitică*.

P. SERGESCU.

C.-AMIRAL C. BOERESCU. Mişcările corpului în spaţiu. Tipografia „Finanţe şi Industrie", Bucureşti 1944.

I. LINTEŞ : Sur la balistique des lances-flammes (Extr. din Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest, XIV-ème année, 1943, No. 4—4).

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

Centenarul Renaşterii Artileriei Române. 1843—1943. Două volume legate editate de *Revista Artileriei.* 1943.

Comemorarea unui veac dela Renaşterea Artileriei Române. Bucureşti 1943. Tipografia Casei Oştirei.

Donate de *Inspectoratul general al Artileriei.*

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4550. *Să se găsească două cuburi, scrise cu toate cifrele 1, 2,... 9, luate câte o singură dată, astfel ca cele două cuburi să nu aibă nicio cifră comună.*

M. GHERMĂNESCU.

Problema revine la aflarea tuturor cuburilor cu cel mult nouă cifre, toate diferite, cifra zero fiind exclusă.

Fie $N = 10a + b < 464$, $a \leqslant 46$; avem

$$(1) \qquad N^3 = 10^3 a^3 + 10^2 (3a^2 b) + 10 (3ab^2) + b^3,$$

în care cifra unităţilor b poate lua valorile 1, 2,... 9.

Vom examina cazul $b = 1$. Egalitatea (1) devine

$$(2) \qquad N^3 = 10^3 a^3 + 10^2 (3a^2) + 10 (3a) + 1$$

în care a ia valorile $a = 0, 1, 2, \ldots 46$. Se vede că $3a$ se termină cu orice cifră, afară de 1, deci a nu se termină prin 7. Vom pune deci $a = 10c + d$, în care $c = 0, 1, 2, 3, 4$, iar $d \neq 7$ şi vom examina toate aceste cazuri.

1°. $a = 10c$; (2) devine

$$N^3 = 10^6 c^3 + 10^4 (3c^2) + 10^2 (3c) + 1.$$

Dacă $c = 0$, avem $N^3 = 1$, care este acceptabil; în celelalte cazuri, cifra zecilor este 0.

2°. $a = 10c + 1$; $3a$ şi $3a^2$ se termină cu 3.

3°. $a = 10c + 2$; (2) devine.

$$N^3 = 1 + 10 \cdot 6 + 10^2 (3c + 2) + 10^3 (2c + 9) + 10^4 (3c^2 + 3c) + 10^5 (6c^2 + c) 10^6 c^3.$$

Dacă $c = 0$, avem numărul $9261 = 21^3$; dacă $c = 1$, cifra miilor este 1; dacă $c = 2$, cifra milioanelor este 0; dacă $c = 3$, cifra sutelor este 1; dacă $c = 4$, cifra zecilor de mii este 1.

4°. $a = 10c + 3$; (2) devine

$$N^3 = 1 + 10 \cdot 9 + 10^2 (3c + 7) + 10^3 (8c + 9) + 10^4 (3c + 8c + 2) + 10^5 (9c^2 + 2c) + 10^6 c^3.$$

Dacă $c = 0$, cifra zecilor de mii este 9; dacă $c = 1$, cifra sutelor este zero; dacă $c = 2$, cifra sutelor şi sutelor de mii

este 3; dacă $c = 3$, cifra sutelor şi a zecilor de mii este 6; dacă $c = 4$, cifra zecilor şi a sutelor este 9.

5°. $a = 10c + 4$; (2) devine

$$N^3 = 1 + 10 . 2 + 10^2 (3c + 9) + 10^3 (4c + 8) + 10^4 (3c + 10c + 6) + 10^5 (2c^2 + 4c) + 10^6 (c^3 + c^2).$$

Dacă $c = 0$, avem $N^3 = 68921 = 41^3$; dacă $c = 1$, cifra zecilor şi a sutelor este 2; dacă $c = 2$, cifra zecilor şi sutelor de mii este 9; dacă $c = 3$, cifra miilor este 1; dacă $c = 4$, cifra sutelor este 1.

6°. $a = 10c + 5$; (2) devine

$$N^3 = 1 + 10 . 5 + 10^2 (3c + 6) + 10^3 . 12 + 10^4 (3c^2 + 8c + 2) + 10^5 (5c^2 + 7c + 1) + 10^6 (c^3 + c^2).$$

Dacă $c = 0$, cifra sutelor de mii este 1; dacă $c = 1$, cifra zecilor şi sutelor de mii este 4; dacă $c = 2$, cifra zecilor de mii este 1; dacă $c = 3$, cifra sutelor este 5; dacă $c = 4$, cifra miilor şi zecilor de mii este 3.

7°. $a = 10c + 6$; (2) devine

$$N^3 = 1 + 10 . 8 + 10^2 (3c + 9) + 10^3 (6c + 6) + 10^4 (3c^2 + 11c + 2) + 10^5 (8c^2 + 2) + 10^6 (c^3 + c^2 + c).$$

Dacă $c = 0$, cifra zecilor şi sutelor de mii este 2; dacă $c = 1$, cifra sutelor de mii este 1; dacă $c = 2$, cifra zecilor şi sutelor de mii este 7; dacă $c = 3$, cifra sutelor este 8; dacă $c = 4$, cifra sutelor este 1.

8°. $a = 10c + 8$; (2) devine

$$N^3 = 1 + 10 . 4 + 10^2 (3c + 4) + 10^3 (8c + 11) + 10^4 (3c^2 + 6c + 2) + 10^5 (4c^2 + 9c + 5) + 10^6 (c^3 + 2c^2 + c).$$

Dacă $c = 0$, cifra zecilor şi sutelor este 4; dacă $c = 1$, cifra miilor şi sutelor de mii este 9; dacă $c = 2$, cifra sutelor este 0; dacă $c = 3$, cifra zecilor de mii este 0; dacă $c = 4$, cifra miilor este 4.

9°. $a = 10c + 9$; (2) devine

$$N^3 = 1 + 10 . 7 + 10^2 (3c + 5) + 10^3 (4c + 13) + 10^4 (3c^2 + 8c + 4) + 10^5 (7c^2 + 4c + 7) + 10^6 (c^3 + 2c^2 + 2c).$$

Dacă $c = 0$, cifra sutelor şi zecilor de mii este 5; dacă $c = 1$, cifra miilor este 7; dacă $c = 2$, cifra sutelor este 1; dacă $c = 3$, cifra zecilor de mii este 7; dacă $c = 4$, cifra sutelor este 7.

Prin urmare, numerele terminate cu 1, având cuburile cu cifre toate diferite şi nenule sunt

$$1^3 = 1,\ 9261 = 21^3,\ 68921 = 41^3.$$

Examinând la fel, celelalte valori $b = 2, 3, \ldots 9$, mai găsim cuburile cu cifre diferite

$$8 = 2^3,\ 1728 = 12^3,\ 32768 = 32^3,$$
$$27 = 3^3,\ 2197 = 13^3,\ 8365427 = 203^3,$$
$$64 = 4^3,\ 13824 = 24^3,$$
$$125 = 5^3,\ 42875 = 35^3,\ 421875 = 75^3,$$
$$216 = 6^3,\ 287496 = 66^3,\ 438976 = 76^3,$$
$$4913 = 17^3,\ 19683 = 27^3,\ 912673 = 97^3,$$
$$512 = 8^3,\ 5832 = 18^3,\ 54872 = 38^3,$$
$$729 = 9^3,\ 6859 = 19^3,\ 24389 = 29^3,\ 24137569 = 289^3,$$
$$32461759 = 319^3.$$

Din acestea, luând cuburile de cel puţin cinci cifre, iar cu celelalte cel mult patru cifre, care nu aparţin acestor cuburi, formând toate numerele posibile, găsim următoarele două soluţii ale problemei

$$8 = 2^3,\ 24137569 = 289^3,\ 32461759 = 319^3,$$
$$5^3 = 125,\ 8^3 = 512,\ 438976 = 76^3.$$

Notă. 1°. D-l Sublt. M. GRUMĂZESCU a găsit ultima soluţie prin încercări, iar D-l AL. I. ROHR a folosit Nota D-lui G-l GH. BUICLIU din G. M., Vol. XL, p. 305, unde sunt date cuburile cu cifre diferite, obţinute folosind o metodă dată de D-l V. THÉBAULT în suplimentul pe luna Octombrie 1934 al revistei *Mathésis*.

Necunoscând acea metodă, am dat soluţia de mai sus.

Cu această ocazie, semnalez că în Nota citată trebue corectat cubul lui 289, iar ultimul cub este al numărului 319.

2°. D-l I. A. BARBU (Liceul „Ioniţă Asan", Caracal) a găsit, prin o încercare sumară, numai soluţia 5^3, 76^3.

3°. A mai rezolvat problema D-l I. N. CONSTANTINESCU (Lic. „N. Bălcescu", Brăila").

M. G.

PROBLEMA 5339. *Fie* A', B', C' *mijloacele segmentelor interceptate respectiv de perechile de laturi* AB, AC; BC, BA; CA, CB *ale unui triunghiu* ABC *pe o transversală* Δ.

Să se arate că dreptele AA', BB', CC' *sunt tangente la o conică circumscrisă triunghiului* ABC.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt tangente unei conice circumscrise triunghiului ABC, punctele de contact nu pot fi decât vârfurile A, B, C ale triunghiului, atunci conform unei teoreme cunoscute, dedusă din exagonul lui PASCAL, problema revine la a arăta că dreptele AA', BB', CC', construite ca în enunț, taie laturile opuse ale triunghiului ABC, *în trei puncte colineare.*

Ceea ce se arată în mai multe moduri. Notăm încă: A_1, B_1, C_1, intersecțiile transversalei Δ cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului; M, N, P, picioarele cevienelor AA', BB', CC' pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului.

Soluția I. Se duce prin A o paralelă la Δ care taie pe BC într'un punct A_2. In triunghiul CAA_2, dreapta B_1C_1 fiind paralelă cu AA_2, iar C' fiind mijlocul lui B_1C_1, rezultă că CC' taie pe AA_2 în mijlocul său A_3. Pentru aceleași motive, considerând triunghiul BAA_2, ceviana BB' taie pe AA_2 în același punct: A_3.

Fie deci $A_3B_3C_3$ triunghiul format de dreptele AA', BB', CC', astfel că $A_3 \equiv (BB', CC')$ se găsește pe o paralelă din A la Δ și în mod analog $B_3 \equiv (CC', AA')$ și $C_3 \equiv (AA', BB')$ se găsesc respectiv pe paralele la Δ duse prin B respectiv C. Rezultă deci că triunghiurile ABC și $A_3B_3C_3$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul dela infinit al transversalei Δ, și deci că laturile lor corespunzătoare se taie în trei puncte colineare. Aceste puncte sunt tocmai M, N, P, căci laturile triunghiului $A_3B_3C_3$ sunt însăși cevienele AA', BB', CC' și deci teorema e stabilită.

Soluția II. Considerăm triunghiurile B_1CA_1 și C_1BA_1 tăiate de transversala AA', rezultă:

$$\frac{MA_1}{MC} \cdot \frac{AC}{AB_1} \cdot \frac{A'B_1}{A'A_1} = 1 \quad , \quad \frac{MB}{MA_1} \cdot \frac{A'A_1}{A'C_1} \cdot \frac{AC_1}{AB} = 1.$$

Inmulţind aceste două relaţii şi ţinând seama că:

$$A'B_1 = -A'C_1$$

rezultă:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AC_1}{AB_1} = -1.$$

Analog se obţin:

$$\frac{NC}{NA}\cdot\frac{BA}{BC}\cdot\frac{BA_1}{BC_1} = -1 \quad , \quad \frac{PA}{PB}\cdot\frac{CB}{CA}\cdot\frac{CB_1}{CA_1} = -1.$$

Inmulţind aceste trei relaţii avem:

$$\left(\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}\right)\cdot\left(\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BA}{BC}\cdot\frac{CB}{CA}\right)\left(\frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1}\right) = -1$$

în care însă:

$$\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BA}{BC}\cdot\frac{CB}{CA} = -1$$

$$\frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = 1,$$

prin ipoteză rămâne deci

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB} = 1$$

şi deci punctele M, N, P sunt colineare.

Soluţia III. Considerăm patrulaterul BCB_1C_1 tăiat de transversala AA'M, conform teoremei lui MENELAUS generalizată avem:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AB_1}\cdot\frac{A'B_1}{A'C_1}\cdot\frac{AC_1}{AB} = 1$$

cum însă prin construcţie

$$\frac{A'B_1}{A'C_1} = -1;$$

rezultă

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{C_1A}{B_1A} = -1$$

şi analog se obţin:

$$\frac{NC}{NA}\cdot\frac{BA}{BC}\cdot\frac{A_1B}{C_1B} = -1 \quad , \quad \frac{PA}{PB}\cdot\frac{CB}{CA}\cdot\frac{B_1C}{A_1C} = -1.$$

Inmulţind aceste trei relaţiuni şi ţinând seama că $AB = -BA$, etc. şi că prin ipoteză:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

rezultă:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

şi deci punctele M, N, P sunt colineare.

Generalizare. Enunţul se poate generaliza astfel:

O transversală Δ taie laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu în punctele A_1, B_1, C_1 şi fie A', B', C' conjugatele armonice ale unui punct S depe Δ faţă de perechile de puncte (B_1, C_1), (C_1, A_1), (A_1, B_1). Dreptele AA', BB', CC' sunt tangente unei conice circumscrisă triunghiului ABC. Sau ceea ce e identic, taie laturile BC, CA, AB în trei puncte M, N, P, colineare.

Fie punctele $A_3 \equiv (BB', CC')$, $B_3 \equiv (CC', AA')$, $C_3 \equiv (AA', BB')$.

Fascicolele armonice $A(C_1, A', B_1, S)$ şi $B(C_1, B', A_1, S)$ având raza AB comună (punctul C_1 găsindu-se pe AB), celelalte raze omoloage se taie în trei puncte colineare, adică C_3, C şi S sunt colineare. Analog se arată că B_3, B, S sunt colineare şi A_3, A, S sunt colineare.

Deci triunghiurile ABC şi $A_3B_3C_3$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul S, şi deci laturile lor adică BC, BA, AB şi AA', BB', CC' se taie în puncte colineare.

In cazul când punctul S devine punctul dela infinit al transversalei Δ, avem problema propusă.

Observaţiuni. 1. Soluţia I a fost dată de D-l M. D. POPA ca bacalaureat al Liceului Militar din Iaşi. Soluţia II a fost dată de D-nii: M. D. POPA şi AL. I. ROHR ca elev la Şcoala de Ofiţeri activi de geniu. Soluţia III a fost dată de D-l IUL. PETRESCU ca elev al Liceului Lazăr din Bucureşti.

2. D-l IUL. PETRESCU arată că pe calea soluţiei III se poate arăta că cevienele ce trec prin mijloacele laturilor corespunzătoare ale triunghiului pedal al unui punct oarecare faţă de triunghiul de bază, sunt concurente.

3. Generalizarea a fost dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU ca elev al Liceului militar din Iaşi.

4. D-l P. P. DRĂGHICESCU dă şi următorul enunţ dual: Se dă un triunghiu ABC şi un punct D pe o dreaptă oarecare σ. Fie α, β, γ intersecţiile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului respectiv cu razele (A'), (B'), (C') conjugate armonic ale dreptei σ faţă de perechile de drepte (DB, DC), (DC, DA).

(DA, DB). Punctele α, β, γ se află pe o conică înscrisă în triunghiul ABC, (Sunt adică punctele de contact corespunzând dual tangentelor AA', BB', CC' la conica circumscrisă din problema propusă).

5. Problema la care s'a redus enunțul propus se cunoaște de altfel din „*Exercices de géométrie moderne*", *tome II, transversales* de G. PAPELIER Paris, Vuibert 1926, la pag. 48, soluția dată acolo diferă de cele publicate mai sus.

AD. GH.

PROBLEMA 5453. *Să se determine produsul numerelor prime cu 1939 din șirul natural al primelor 1938 numere, apoi produsul numerelor prime cu 1938 din șirul natural al primelor 1939 numere. Să se compare rezultatele.*

CPT. COMANDOR I. LINTEȘ.

In formula expresiei $P_M(M)$, unde notațiile sunt cele obișnuite, facem pe rând $M = 1938$, $N = 1939$ și $M = 1939$, $N = 1938$ și obținem

$$P_{1938}(1939) = \frac{1938!\, E\left(\frac{1938}{7.277}\right)!\, (7.277)^{E\left(\frac{1938}{7.277}\right)}}{E\left(\frac{1938}{7}\right)!\, E\left(\frac{1938}{277}\right)!\, 7^{E\left(\frac{1938}{7}\right)} \cdot 257^{E\left(\frac{1938}{277}\right)}}$$

$$= \frac{1938!}{276!\, 6!\, 7^{276} \cdot 277^6}$$

$$= \frac{1938 \cdot 1939 \cdot 277^2 \cdot 7^2}{1939 \cdot 276! 277 \cdot 6! 7 \cdot 7^{276} \cdot 7.277^6 \cdot 277} = \frac{1939!\, 1939}{277!\, 7!\, 7^{277} \cdot 277^7} = \pi(1939)$$

unde $\pi(1939)$ reprezintă produsul numerelor prime cu 1939 și mai mici ca el.

$$P_{1939}(1938) = \frac{1939!\, 6!\, 34!\, 38!\, 51!\, 57!\, 323!\, 6^{323} \cdot 34^{57} \cdot 38^{51} \cdot 51^{38} \cdot 57^{34} \cdot 323^6 \cdot 1!\, 1938^1}{969^2\, 969!\, 646! 114! 102! 2^{969} \cdot 3^{646} \cdot 17^{114} \cdot 19^{102} \cdot 19! 17! 3! 2! 646^3 \cdot 114^{17} \cdot 102^{19}}$$

$$= 1939 \cdot P_{1938}(1938) = 1939 \cdot \pi(1938).$$

Numărul 1938 are patru factori pe când 1939 are numai doi, unul fiind foarte mare, deci $\pi(1938)$ este cu mult mai mic decât $\pi(1939)$ şi are loc chiar relaţia

$$\pi(1938) \cdot 1939 < \pi(1939)$$

sau

$$P_{1939}(1938) < P_{1938}(1939).$$

Se poate arăta şi direct această relaţie şi se poate determina destul de uşor valoarea expresiilor $P_{1938}(1939)$ şi $P_{1939}(1938)$ ţinând seama de faptul că aceste numere sunt consecutive si prime.

$P_{1938}(1939)$ după semnificaţia lui nu este decât $\pi(1939)$ pentrucă 1938 este prim cu 1938.

P_{1939} conţine printre factorii săi pe $\pi(1938)$ şi singurul factor care se adaogă acestui produs pentru a avea $P_{1939}(1938)$ este 1939, deci $P_{1939}(1938) = \pi(1938) \cdot 1939$.

Ţinând seama de valorile produselor $\pi(1938)$ şi $\pi(1939)$ putem scrie de asemenea

$$P_{1939}(1938) = \pi(1938) \cdot 1939 < P_{1938}(1939) = \pi(1939).$$

VRÂNCEANU GH. GH.
cl. VI A Liceul Militar „Mihai Viteazul"
Timişoara.

A mai trimis o soluţie D-l V. D. PĂLĂCEANU.

PROBLEMA 5536. *Fie* I, I_a *centrele cercurilor înscris şi exînscris triunghiului* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *triunghiul anticomplementar. Dreapta* B_1I *taie pe* BC *în* A_c. *Punctele* I_a, A_c, C_1 *sunt în linie dreaptă; analoagele lor sunt de asemenea puncte în linie dreaptă.*

HORIA M. BODNĂRESCU.

Soluţie dată de D-nii: CRISTU I. CANTUNIAR (lic. Titu Maiorescu, Bucureşti), CONST. V. PANTELIMON (Şc. Ofiţeri Artilerie antiaeriană, Bucureşti), ALEXANDRU IEŞAN (lic. Matei Basarab, Bucureşti), TRAIAN MUSTĂCESCU (lic. Titu Maiorescu, Bucureşti), MIREL D. STOENESCU (S-lt. aviator, Bucureşti), ŞERBAN I. STOIANOVICI (C. N. „N. Filipescu", Predeal.

Punctele C_1, A_c, I_a sunt aşezate respectiv pe laturile triunghiului AB_1I; să cercetăm dacă e îndeplinită relaţia lui MENELAUS. Avem mai întâi:

$$(1) \qquad \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{1}{2}.$$

Dreptele paralele B_1C_1, BC determină pe AI, B_1I, segmente proporţionale

$$\frac{\overline{A_c B_1}}{\overline{A_c I}} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'I}}$$

unde A' este piciorul bisectoarei pe BC; proiectând pe înălţimea din A, avem, în notaţii cunoscute

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'I}} = \frac{h_a}{r} = \frac{2p}{a}$$

deci

$$(2) \qquad \frac{\overline{A_c B_1}}{\overline{A_c I}} = \frac{2p}{a}.$$

Avem în acelaşi mod

$$(3) \qquad \frac{\overline{I_a I}}{\overline{I_a A}} = \frac{r + r_a}{h_a + r_a} = \frac{\frac{s}{p} + \frac{s}{p-a}}{\frac{2s}{a} + \frac{s}{p-a}} = \frac{a}{p}.$$

Inmulţind (1), (2), (3) avem

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B_1}} \cdot \frac{\overline{A_c B_1}}{\overline{A_c I}} \cdot \frac{\overline{I_a I}}{\overline{I_a A}} = 1$$

deci punctele I_a, A_c, C_1 sunt colineare.

Analog sunt colineare punctele (B_1, A_b, I_a), (A_1, B_a, I_b), (C_1, B_c, I_b), (B_1, C_b, I_c), (A_1, C_a, I_c) unde A_b este intersecţia dreptelor C_1, I, BC, etc.

Observaţii. 1°. Soluţie în coordonate baricentrice date de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Liceul militar, Iaşi). Fie ABC triunghiul de referinţă. Avem punctele $B_1(1, -1, 1)$, $C_1(1, 1, -1)$, $I(a, b, c)$, $I_a(-a, b, c)$. Dreapta B_1I are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\alpha(b + c) + \beta(c - a) - \gamma(a + b) = 0$$

deci punctul (B_1, I, BC) este A_c (0, $a+b$, $c-a$). Punctele I_a, A_c, C_1 sunt în linie dreaptă, căci

$$\begin{vmatrix} -a & b & c \\ 0 & a+b & c-a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dreapta lor are ecuaţia

$$\alpha(b+c)+\beta(c-a)+\gamma(a+b)=0.$$

2°. D-l P. P. DRĂGHICESCU a dat încă o soluţie în genul celei dintâi, înlocuind segmentele prin expresiile lor trigonometrice.

3°. Soluţia autorului nu diferă de prima soluţie dată.

4°. Un bun corespondent a luat eronat coordonatele baricentrice ale punctelor A_1, B_1, C_1 dar soluţia a dus la rezultat. Deci problema este mai generală. O altă generalizare va fi dată ca problemă propusă.

N. M.

PROBLEMA 5769. *Isogonalul simetricului ortocentrului unui triunghiu în raport cu punctul* FEUERBACH, *relativ la cercul înscris, se află pe dreapta care uneşte centrele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi MIREL D. STOENESCU (S-lt. av. Bucureşti).

Se ştie că transformata isogonală a dreptei ce uneşte centrele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului este iperbola echilateră a lui BOUTIN, circumscrisă triunghiului [1]), cu centrul în punctul FEUERBACH φ relativ la cercul înscris [2]).

Deci simetricul ortocentrului în raport cu punctul φ se găseşte pe iperbola BOUTIN de mai sus şi isogonalul său este situat pe dreapta ce uneşte centrele cercurilor înscris şi circumscris.

Observaţii. 1. De proprietăţi analoage celor de mai sus se bucură şi celelalte puncte ale lui FEUERBACH, cercul înscris fiind înlocuit cu cercul exînscris corespunzător (P. P. DRĂGHICESCU, M. D. STOENESCU).

---

1) C. COŞNIŢĂ: Coordonnées barycentriques, pag. 137.

2) Idem, pag. 155.

2. Putem enunța analog: *isogonal simetricului ortocentrului sau centrului de greutate, în raport cu centrul iperbolei lui* KIEPERT *se află pe dreapta ce unește centrul cercului circumscris cu punctul lui* LEMOINE (M. D. STOENESCU).

3. Simetricul H' al ortocentrului H față de φ, este situat pe cercul circumscris, φ fiind pe cercul lui EULER și aceste cercuri fiind omotetice de centru H, raport 2. Cum punctele cercului circumscris au ca isogonale punctele dreptei dela infinit, rezultă că punctul problemei 5769 este *punctul dela infinit al dreptei* OI (P. P. DRĂGHICESCU).

4. *Dreapta lui* SIMSOM *a punctului* H' *este perpendiculară pe* OI, căci isogonalul unui punct de pe cercul circumscris este punctul dela infinit al direcției perpendiculare pe dreapta lui SIMSON a acestui punct (P. P. DRĂGHICESCU). Această problemă și problema 4516, rezolvată în G. M., Vol. XLVIII, pag. 270, trebue să fie conexate. Ele sunt cazuri particulare ale unei alte probleme propuse, care admite și o soluție directă.

PROBLEMA 5888. *Pe o masă orizontală, situată la înălțimea* h *deasupra solului, se află un corp* A *căruia i se imprimă o iuțeală inițială orizontală* v_0. *Corpul străbate o distanță* $\overline{AB} = a$ *cu frecare de alunecare (coeficient de frecare* f*) și lovește un alt corp* B *aflat în repaos pe marginea mesei (coeficient de elasticltate* k*).*

Cele două corpuri au aceeași masă și pot fi asimilate unor puncte materiale.

Să se studieze mișcarea după ciocnire a celor două corpuri.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de D-l EUGEN CARAMALĂU (Turnu-Severin).

Vom împărți studiul problemei în trei părți: studiul mișcării corpului A până la ciocnirea lui cu corpul B, studiul ciocnirii în B și studiul mișcării corpurilor A și B după ciocnire.

I. *Studiul mișcării corpului* A *înainte de ciocnire.*

Fie m masa comună a corpurilor A și B. Notând cu v_1 iuțeala cu care corpul A ajunge în B, avem aplicând *teorema energiei cinetice*:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = L \qquad (1)$$

în care L este *lucrul mecanic* al forțelor ce lucrează asupra corpului A.

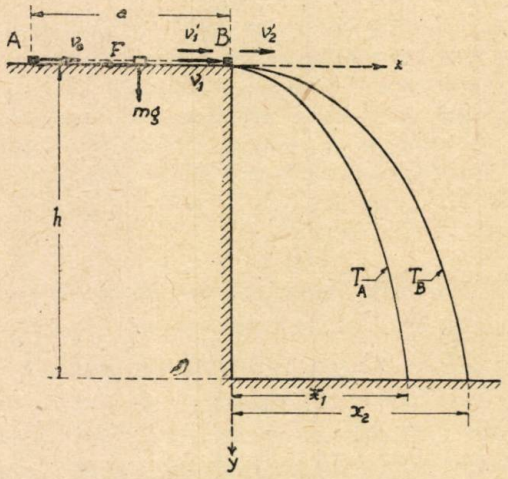
Singura forță care produce lucrul mecanic este *frecarea* $F=fmg$, iar lucrul mecanic este *rezistent*:

$$L = -fmga$$

Introducând în (1) obținem:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2fga}$$

cu condiția de realitate $v_0^2 > 2fga$.



II. *Studiul ciocnirii în* B.

Să notăm cu v_1' și v_2' *iuțelile după ciocnire* a corpurilor A și B.

Teorema *constantei cantităților de mișcare* ne dă relația:

$$mv_1 = mv_1' + mv_2' \qquad (2)$$

iar *definiția coeficientului* k *de elasticitatea* cea de a doua relație:

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1} \qquad (3)$$

Rezolvând sistemul (2), (3) obținem:

$$v_1' = \frac{(1-k)\,v_1}{2} = \frac{1-k}{2}\sqrt{v_0^2 - 2fga}$$

$$v_2' = \frac{(1+k)\,v_1}{2} = \frac{1+k}{2}\sqrt{v_0^2 - 2fga}. \qquad (4)$$

Pentru $k = 1$ (corpuri perfect elastice)

$$v_1' = 0 \quad , \quad v_2' = v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2fga}$$

corpul A *rămâne pe marginea mesei* în locul corpului B care *cade*.

Pentru $k < 1$ *ambele corpuri cad.*

Un caz particular important îl constitue valoarea $k > 0$ (corpuri plastice) pentru care:

$$v_1' = v_2' = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \sqrt{v_0^2 - 2fga}$$

în care caz corpurile A şi B *cad împreună.*

III. *Studiul mişcării corpurilor* A *şi* B *după ciocnire.*

Alegând sistemul de axe Bx orizontal şi By vertical descendent ecuaţiile mişcării pentru corpul A respectiv B sunt:

$$\text{A} \begin{cases} x = v_1' t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \text{B} \begin{cases} x = v_2' t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Rezultă că la *fiecare moment* t cele două corpuri se află *la acelaşi nivel deasupra solului.*

Ambele corpuri *ating solul* la timpul t dat de relaţia:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Distanţele respective dela punctele de cădere la verticala punctului B sunt:

pentru corpul A

$$x_1 = v_1' \sqrt{\frac{2h}{g}} = (1 - k) \sqrt{\frac{(v_0^2 - 2fga)\ h}{2g}}$$

pentru corpul B (5)

$$x_2 = v_2' \sqrt{\frac{2h}{g}} = (1 + k) \sqrt{\frac{(v_0^2 - 2fga)\ h}{2g}}.$$

Observaţie. Din problema 5888, rezultă o metodă pentru determinarea pe cale experimentală a coeficientului k de *elasticitate.*

In adevăr din relaţiile (5) scoatem:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1 - k}{1 + k} \quad \text{sau:} \quad k = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

Prin urmare, putem determina pe k prin măsurarea distanţelor dela punctele de cădere pe sol ale celor două corpuri până la peretele vertical al mesei.

Notă. A mai rezolvat problema şi D-l MIRCEA C. MANOLACHE (Politechnica, Bucureşti).

AL. ST.

EXERCIŢII

1. *Dacă între numerele* a, b, c, *avem relaţia:*

$$(2a+b-c)^3+2(b+c-2a)^3+(c+2a-b)^3=2(b+c)^3$$

atunci a *este media armonică între* b *şi* c.

T. STOICESCU.

Primul şi ultimul termen al membrului I conduce la:

$$(2a+b-c)^3+[2a-(b-c)]^3=16a^3+12a(b-c)^2;$$

al doilea termen al membrului I trecut în membrul al doilea şi desvoltat, face din membrul al doilea expresia:

$$12a(b+c)^2-24a^2(b+c)+16a^3.$$

Am căpătat astfel egalitatea:

$$16a^3+12a(b-c)^2=12a(b+c)^2-24a^2(b+c)+16a^3$$

prin reduceri şi simplificări găsim:

$$(b-c)^2=(b+c)^2-2a(b+c)$$

adică:

$$2bc=a(b+c)$$

sau:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{a}.$$

2. *Să se rezolve în numere întregi şi pozitive ecuaţia*

$$x+3y+z\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=17{,}25+5\sqrt{5}$$

A. H. CUBAT.

R. Desvoltând patratul obţinem

$$4x+12y+9z+4z\sqrt{5}=69+20\sqrt{5}.$$

Ecuaţia trebue să aibă soluţii întregi pozitive, deci părţile iraţionale trebue să dispară. Pentru aceasta

$$4x+12y+9z=69 \quad \text{şi} \quad 4z\sqrt{5}=20\sqrt{5}.$$

Ultima din aceste ecuaţii dă $z=5$, care dus în prima dă

$$x+3y=6$$

de unde se deduc soluţiile

$$x=0\ ;\ 3\ ;\ 6$$

$$y=2\ ;\ 1\ ;\ 0.$$

PROBLEME PROPUSE

6006. In ziua de 24 August 1944, orele 10,20 aviația germană a bombardat București cu efecte dezastroase, mai mari ca bombardamentul din 4 Aprile a. c.

Pentru acest nou bombardament se propune aceeași chestiune ca în problema Nr. 5950 din *Gazeta Matematică* Nr. 9, anul XLIX, luând ca localitate Berlinul.

I. IONESCU.

6007. Dacă p_i, unde $i = 1, 2, \ldots, n$, reprezintă primele n numere prime și dacă $n > 7$, atunci avem

$$p_{n+1} > 2(n+1),$$

unde p_{n+1} este numărul prim imediat superior lui p_n.

COMANDOR I. LINTEȘ.

6008. Fie N un număr oarecare de $(n-3)$ cifre și fie Nabc numărul de n cifre, ce se obține scriind la dreapta lui N numărul de trei cifre abc. Să se demonstreze, că terminațiile de n cifre ale patratelor numerelor prime cu 10 sunt de una din formele

$$\mathrm{N}(2b-a)(2a)1 \quad \text{și} \quad \mathrm{N}(2b-a)(2a)9,$$

unde a și b au astfel de valori încât $(2b-a)$ și $(2a)$ să fie cifre efective, adică

$$0 \leqq a \leqq 4 \quad \text{și} \quad a \leqq 2b \leqq 9+a.$$

Reciproc, să se arate, că toate numerele de formele de mai sus sunt efectiv terminații de patrate perfecte.

IOAN B. FLORESCU.

6009. Dacă avem în mod identic (oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x_i - \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x_i\right]^m \equiv \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x_i - x_1^i),$$

unde $x_0 = 1$ și $m < n$, atunci b_i sunt coeficienții desvoltării binomului

$$(a_0 + a_1 x)^m.$$

N. N. MIHĂILEANU.

6010. Se consideră determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

Fie X_i, Y_i, Z_i, T_i $(i=1, 2, 3, 4)$ minorii elementelor x_i, y_i, z_i, t_i. Dacă

$$x_3 y_4 = x_4 y_3 \quad , \quad y_4 z_1 = y_1 z_4 \quad , \quad z_1 t_2 = z_2 t_1 \quad , \quad t_2 x_3 = x_2 t_3 ,$$
$$y_1 t_3 = y_3 t_1 ,$$

există şi relaţiile

$$X_3 Y_4 = X_4 Y_3 \quad , \quad Y_4 Z_1 = Y_1 Z_4 \quad , \quad Z_1 T_2 = Z_2 T_1 ,$$
$$T_2 X_3 = X_2 T_3 \quad , \quad Y_1 T_3 = Y_3 T_1 .$$

Să se dea interpretarea geometrică a problemei.

C. IONESCU-BUJOR.

6011. Să se calculeze limita expresiei

$$E = (x + \sin x)^{\frac{1}{x - \sin x}}$$

când x tinde către infinit.

M. GHERMĂNESCU.

6012. Se consideră şirul

$$u_0 , u_1 , \ldots , u_m , \ldots$$

unde avem

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2} + \ldots + u_{m-n} \quad , \quad m = n, n+1, n+2, \ldots ;$$
$$u_0 = u_1 = \ldots = u_{n-2} = 0 \quad ; \quad u_{n-1} = 1 ,$$

Se cere, să se arate că avem

$$u_{m+n} > \left(\frac{2n-1}{n} \right)^m , \quad m > 0.$$

TIBERIU POPOVICIU.

6013. Fie un patrulater convex $A_1A_2A_3A_4$. Pe mijlocul O al lui A_1A_2 se duce o perpendiculară pe care se ia un punct variabil M. Din A_3 se scoboară o perpendiculară pe A_4M care taie pe A_1M în P. Se cere: 1° Locul lui M. 2° Locul intersecției Q a dreptelor A_2M, A_3P.

N. GAIU.

6014. Din vârfurile unui triunghiu în plan vertical pornesc în același timp câte două mobile grele, alunecând de-a-lungul laturilor respective.

1. Dreptele unind mobilele corespunzătoare aceloraşi vârfuri, formează un triunghiu asemenea cu triunghiul de referință.

2. Acest triunghiu rămâne omotetic cu el însuşi în tot timpul mişcării.

3. Să se determine direcția razelor de omoteție.

4. Să se determine centrul de omoteție.

5. Când triunghiul de referință variază ca poziție, ce descrie centrul de omoteție în raport de triunghiu?

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

6015. Fie I şi I_a centrul cercului înscris şi exînscris triunghiului ABC. Perpendicularele în I şi I_a pe BI şi BI_a întâlnesc latura BC în M şi M'. Se obțin la fel punctele N şi N', luând intersecțiile lui BC cu perpendicularele în I şi I_a pe CI şi CI_a. Să se demonstreze, că

$$\overline{MN} \times \overline{M'N'} = a^2,$$

unde a este latura $\overline{BC}$.

G-L GH. BUICLIU.

6016. Se consideră patru drepte Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ în același plan, formând un patrulater propriu zis. Se notează cu δ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ distanțele punctului lui MIQUEL la laturile patrulaterului format şi R_1, R_2, R_3, R_4 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor determinate de dreptele $(\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$, $(\Delta_3\Delta_4\Delta_1)$, $(\Delta_4\Delta_1\Delta_2)$, $(\Delta_1\Delta_2\Delta_3)$. Se notează de asemeni cu δ semiparametrul parabolei înscrise şi cu R raza cercului lui STEINER, ce trece prin centrele cercurilor de rază R_1, R_2, R_3, R_4. Să se arate, că avem

$$R_1\delta_1 = R_2\delta_2 = R_3\delta_3 = R_4\delta_4 = R\delta.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

6017. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

$$y'^2y'' + yy'y''' + 2yy''^2 = 0 \quad , \quad yy'y''' - y'^2 - 2yy''^2 + y'^2y'' = 0.$$

N. ABRAMESCU.

6018. Se introduce un cilindru omogen plin într'un tub cu pereţii groşi şi se imprimă ansamblului o mişcare de rotaţie şi o mişcare de translaţie în linie dreaptă. Presupunând că între tub şi cilindru nu există frecare decât în fund, se cere condiţia ca cilindrul să nu se rotească faţă de tub.

Problema este o aplicaţie de balistică interioară. Cilindrul este încărcătura de explozie, iar tubul cu pereţii groşi este corpul proiectilului.

I. MURĂROIU.

6019. Pentru determinarea experimentală a centrului de greutate G al unui avion, se aşează aparatul pe două cântare situate la aceeaşi înălţime, primul cântar indicând 4,5 tone, iar al doilea 1,5 tone (pe primul se aşează roţile din faţă, iar pe al doilea trenul de aterisaj). Se ridică apoi trenul în sus aşezându-se pe un cântar situat la 1,5 m deasupra celuilalt. In această nouă poziţie, în care roţile au rămas pe loc, cântarele indică respectiv 5,5 tone şi $\frac{1}{2}$ tonă. Ştiind că distanţa dela punctul de sprijin al trenului de aterisaj la dreapta ce uneşte punctele de sprijin ale roţilor este de 4,5 m, să se determine coordonatele lui G faţă de un sistem de axe rectangulare convenabil ales.

RADU BĂDESCU.

6020. Fie un tub subţire îndoit în formă de arc de cerc de rază R cu centrul în O, situat într'un plan vertical, extremitatea A a tubului fiind pe orizontala lui O, iar punctul cel mai de jos C al tubului pe verticala lui O. Cealaltă extremitate B a tubului este astfel încât unghiul COB este α. Pe extremitatea A a tubului se dă drumul unei bile de masă m fără iuţeală iniţială. Pe cealaltă extremitate B se dă drumul, fără iuţeală iniţială unei bile identice tot de masă m astfel să se ciocnească cu prima în punctul cel mai de jos al tubului, C. Să se studieze mişcarea bilelor după ciocnire, pentru cazul ciocnirii plastice sau perfect elastice şi pentru diferite valori ale lui α.

GABRIELA ŢIŢEICA.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (4598, 973, 5010, E, P); *Barbu A. I.* (5940, 41, 51, 54, 56, 57, 66, 71, 80, 81, 82, 85, 86, 6002, P); *Braşoveanu D. Gheorghe* (5906, 07, 22, 62, 66, 80); *Cojanu G. Aurel* (5855, 42, 6002, 05); *Cubat Aurel* (5588, 602, 815, 43, 55, 79, 94); *Dumitrescu G. Traian* (5805, 954); *Grigore A. Gh.* (4102, 5852, 79, 911, 41, 53, 57, 66, 80, 81, 85, 86); *Manoliu I. Mihai* (5891, 920, 21, 36, 37, 43); *Pătrăşcioiu I. Mircea* (4045, 360, 513, 5739, 940, 57, 71, 72, 81, 85); *Soare V. Mircea* (5840, 42, 79, 907, 54, 66, 71, 80); *Vrânceanu Gh. Gheorghe* (5951, 66, 67, 80, 81, 82).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 25.577.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. † Barbu Sergescu . . . . . *Cristea Mateescu.*
2. Relații între indicatorii numerici . . . . *Ioan B. Florescu.*
3. O problemă din geometria triunghiului . *Șerban Gheorghiu.*
4. Proprietăți ale vârfurilor unui tetraedru în raport cu ariile fețelor care trec prin aceste vârfuri . . . . . *N. Abramescu.*
5. Note matematice: 4 — 7.
6. Bibliografie.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3913, 4671, 5172, 5221, 5242, 5293, 5640, 5657, 5702, 5729, 5786, 5794, 5862, 5885, 5899.
9. Exerciții: 3 — 4.
10. Probleme propuse: 6021 — 6035.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **60**06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

† BARBU SERGESCU

In 29 Iulie din acest an, s'a stins din viaţă, în vârstă de numai 48 ani, Inginerul de Mine BARBU SERGESCU, după ce timp de 10 ani, o boală, rămasă necunoscută, l-a subminat cu încetul.

Moartea l-a găsit în mijlocul familiei, la Izvorul Bârzei aproape de Turnu-Severin, oraşul său natal, însă departe de locurile unde a activat, izolat de colegii şi prietenii care l-au apreciat şi iubit.

BARBU SERGESCU a urmat studiile liceale la Severin, a fost corespondent al Gazetei prin 1911—1913 şi a absolvit în 1918 Facultatea de Matematici la Bucureşti, luând licenţa cu menţiunea „foarte bine". A participat la războiul pentru întregire şi, după încheierea păcii, a funcţionat ca profesor de matematici la liceul din Turnu-Severin, însă numai timp de un an, deoarece adevărata sa vocaţie era ingineria. Urmează în anii 1918—1922 Şcoala Superioară de Mine din Paris, pe care o termină clasificat *al doilea*, dintr'o promoţie de 60 elevi, dintre care mulţi erau absolvenţi ai Şcoalei Politechnice din Paris. In 1922, depune o foarte apreciată activitate în Ministerul Industriei şi Comerţului iar în 1923 este angajat de Societatea „Steaua Română", unde BARBU SERGESCU găseşte mediul prielnic pentru o muncă pasionată şi încordată. Începe activitatea ca practicant în schelă şi urcă toate treptele ierarhice ajungând în 1941 director principal technic în Bucureşti. Studiază diferite chestiuni technice, dar mai cu seamă sistemele de foraj, făcând în acest scop şi o călătorie de informaţii în America. Studiile acestea le-a publicat în vreo 15 articole în diferite reviste technice şi le-a aplicat pe şantierele petrolifere. Pentru învăţământul nostru este o pierdere — deşi potenţială, însă regretabilă — că BARBU SERGESCU nu a avut ocazia să transmită şi celor mai tineri cunoştinţele sale atât de temeinice.

Fire extrem de modestă, era mereu conştient de imperfecţiunea fiinţei umane; de aceea nu a încetat un moment de a cerceta şi studia, iar pe de altă parte nu a fost niciodată nemulţumit de locul ce ocupa şi nu cerea nimănui nimic. De aceea şi ascensiunea lui profesională şi socială ne apare uniformă, sigură, ca un fenomen natural.

BARBU SERGESCU nu a fost numai emerit inginer şi om de ştiinţă, el avea un suflet bun, cald, generos. Simpatizat de toţi, a ocupat şi în societate, un loc proeminent. A creat Asociaţia pentru Şcoli de pilotaj din Câmpina, al cărei preşedinte a fost.

A mai fost președintele secției de foraje a Asociației Industriilor petrolifere din România și președintele Asociației Inginerilor și Technicienilor din Industria Petrolului, Secția Câmpina.

Pentru însușirile lui sufletești și meritele sale profesionale, regretele noastre, ale celor care l-am cunoscut și iubit, se unesc cu acelea ale întregei Societăți românești care a pierdut un membru atât de valoros.

Societatea *Gazeta Matematică*, al cărei membru devotat a fost, îi va păstra de asemenea o pioasă amintire!

CRISTEA MATEESCU.

RELAȚII INTRE INDICATORII NUMERICI

I. Imi propun să determin numărul fracțiilor cuprinse între zero (exclusiv) și unu (inclusiv), care au numitorii mai mici sau cel mult egal cu N.

O primă determinare o putem obține astfel:

Sunt S fracții în condițiile de mai sus care au numitorul S și anume 1/S, 2/S, ... S/S. Prin urmare numărul de determinat este:

$$\sum_{S=1}^{N} S = \frac{N(N+1)}{2}.$$

O a doua determinare, mai puțin simplă dar mai bogată în consecințe, este următoarea:

Fracțiile ce voim să numărăm sunt sau ireductibile sau echivalente cu alte fracții ireductibile cu termenii mai mici.

Este ușor de observat că sunt $\varphi(i)$ fracții ireductibile cu numitorul i, și că dintr'o fracție ireductibilă cu numitor i se pot obține $E\left(\frac{N}{i}\right)$ fracții echivalente din acelea ce vrem să numărăm. Deci numărul de determinat este:

$$\sum_{i=1}^{N} E\left(\frac{N}{i}\right)\varphi(i)$$

unde am notat cu E(A) și φ(B) ca de obiceiu, simbolul lui LEGENDRE (numărul întregilor cuprinși în A) și Indicatorul numeric (numărul numerelor prime cu B și mai mici decât B).

Egalând cele două determinări diferite obținem relația remarcabilă:

$$(1) \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{N} E\left(\frac{N}{i}\right)\varphi(i) = \frac{N(N+1)}{2}}$$

II. Relația (1) se poate demonstra și direct după cum urmează:

Observăm că diferența:

$$E\left(\frac{N}{i}\right) - E\left(\frac{N-1}{i}\right)$$

este egală fie cu 1, fie cu 0, după cum i este sau nu este divizor al lui N. Deci

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{N} E\left(\frac{N}{i}\right)\varphi(i) = \sum_{i=1}^{N-1} E\left(\frac{N-1}{i}\right)\varphi(i) + \sum_{i=d}\varphi(i)$$

suma 2-a din termenul al 2-lea al egalității de mai sus întinzându-se asupra tuturor divizorilor ($d_1 = 1$, $d_2, \ldots d_n = N$) ai lui N. Insă se știe că avem:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_n) = N.$$

Așa încât (2) devine:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{N} E\left(\frac{N}{i}\right)\varphi(i) = N + \sum_{i=1}^{N-1} E\left(\frac{N-1}{i}\right)\varphi(i)$$

Adunând relațiile ce se obțin din (3) făcând pe $N = 2, 3, \ldots N$, membru cu membru și observând că $E\left(\frac{1}{1}\right)\varphi(1) = 1$, obținem tocmai relația (1).

III. Cum

$$E\left(\frac{N}{i}\right) \leqslant \frac{N}{i},$$

egalitatea având loc numai pentru i, divizor al lui N și cum pentru

$N > z$ există cel puţin un număr mai mic ca N care nu este divizor al lui N, rezultă că pentru $N > z$, avem:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{N}{i} \varphi(i) > \frac{N(N+1)}{2},$$

deci

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi(i)}{i} > \frac{N+1}{2}} \quad (4)$$

IV. Fie $N = 2M$ şi cum $E\left(\frac{2M}{i}\right) = 1$ pentru

$$i = M+1,\ M+2, \ldots 2M,$$

relaţia (1) devine:

$$\sum_{i=1}^{M} E\left(\frac{2M}{i}\right) \varphi(i) + \sum_{i=M+1}^{2M} E\left(\frac{2M}{i}\right) \varphi(i) = M(2M+1)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{M} E\left(\frac{2M}{i}\right) \varphi(i) + \sum_{M+1}^{2M} \varphi(i) = M(2M+1). \quad (5)$$

Insă

$$2E\left(\frac{M}{i}\right) < E\left(\frac{2M}{i}\right) < 2E\left(\frac{M}{i}\right) + 1.$$

De care ţinând seamă în (5), obţinem:

$$2\sum_{1}^{M} E\left(\frac{M}{i}\right) \varphi(i) + \sum_{M+1}^{2M} \varphi(i) < M(2M+1)$$

$$\therefore \quad M(M+1) + \sum_{M+1}^{2M} \varphi(i) < M(2M+1)$$

$$\therefore \quad \boxed{\sum_{M+1}^{2M} \varphi(i) < M^2} \quad (6)$$

şi

$$2\sum_{i=1}^{M} E\left(\frac{M}{i}\right) \varphi(i) + \sum_{i=1}^{M} \varphi(i) + \sum_{M+1}^{2M} \varphi(i) > M(2M+1)$$

$$\therefore \quad M(M+1) + \sum_{1}^{2M} \varphi(i) > M(2M+1)$$

deci

$$\boxed{\sum_{1}^{2M} \varphi(i) > M^2} \quad (7)$$

Relaţia (6) împreună cu

$$\sum_{M+1}^{2M+1} \varphi(i) = \sum_{M+1}^{2M} \varphi(i) + \varphi(2M+1) < M^2 + 2M$$

ne permite să demonstrăm din aproape în aproape relaţia:

$$(8) \qquad \sum_{1}^{N} \varphi(i) < \frac{3}{8} N(N+1).$$

Această limitare superioară a lui $\sum_{1}^{N} \varphi(i)$ este mai puţin bună decât aceea ce se cere a se demonstra în problema 3713 [1]) propusă la pag. 119, Vol. XXXIV şi nerezolvată încă şi pe care am obţinut-o plecând dela alte consideraţii.

De asemenea relaţia (7) ne permite să demonstrăm că

$$(9) \qquad \sum_{1}^{N} \varphi(i) > \frac{2}{9} N(N+1).$$

Posed o demonstraţie pentru limitarea inferioară a lui $\sum_{1}^{N} \varphi(i)$ mai bună decât aceasta şi pe care o voi publica. Acea delimitare este:

$$\left[\sum_{1}^{N} \varphi(i) > \frac{1}{4} N(N+1)\right].$$

De asemenea am reuşit să demonstrez că

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N(N+1)} \sum_{1}^{N} \varphi(i) \to \frac{3}{\pi^2}$$

demonstraţie care nu se încadrează nici ca metodă nici ca scop în acest articol.

In adevăr, scopul acestui articol, nu este altul decât de a arăta ce se poate obţine din studiul atent al unei probleme elementare de aritmetică, în speţă problema 5604, propusă de D-l ION IONESCU şi rezolvată la pag. 434, Vol. XLVII *Gazeta Matematică*.

Pentru încheiere, ţin să remarc că limitările superioară şi inferioară a lui $\Sigma\varphi(i)$ sunt în acelaşi timp şi limitări ale numărului fracţiilor ireductibile, subunitare cu numitorii mai mici sau cel mult egal cu un număr dat.

IOAN B. FLORESCU.

---

1) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI *Gazeta Matematică*.

O PROBLEMĂ DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

In cele ce urmează îmi propun a relua problema ce formează obiectul articolului cu acelaşi titlu, al D-lui GENERAL GH. I. POPESCU, publicat în G. M., XLIX, pag. 661—666.

1. Fie M un punct în planul unui triunghiu ABC şi M*a*, M*b*, M*c*, proiecţiunile lui pe laturile BC, CA şi AB. Insemnăm cu *a, b, c* aceste laturi şi cu *l, m, n* lungimile AM, BM, CM. Insemnăm de asemeni cu O şi R, centrul şi raza cercului ABC. Se ştie că avem:

$$M_b M_c = \frac{al}{2R} \quad , \quad M_c M_a = \frac{bm}{2R} \quad , \quad M_a M_b = \frac{cn}{2R} .$$

Rezultă de aci, că λ_a, λ_b, λ_c definiţi prin egalităţile

$$\begin{aligned} -al + bm + cn &= \lambda a \\ al - bm + cn &= \lambda b \\ al + bm - cn &= \lambda c \end{aligned} \qquad (1)$$

sunt pozitivi. De asemeni dacă punctul M se găseşte pe cercul circumscris una din cantităţile λ_a, λ_b sau λ_c se anulează.

Rezolvând sistemul (1) în raport cu *l, m* şi *n* se obţine:

$$l = \frac{\lambda_b + \lambda_c}{2a} \quad , \quad m = \frac{\lambda_c + \lambda_a}{2b} \quad , \quad n = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2c} \qquad (2)$$

Se ştie că între laturile *a, b, c* şi distanţele *l, m, n* există o relaţiune algebrică. Există deci o relaţiune şi între laturile *a, b, c* şi λ_a, λ_b, λ_c. Prin urmare, aceste din urmă cantităţi nu pot avea valori arbitrare.

Totuşi, *dându-se trei cantităţi pozitive, arbitrare* λ_a, λ_b, λ_c *există două puncte* M' *şi* M'' *inverse (simetrice) în raport cu cercul circumcris, astfel ca distanţele lor la vârfuri să fie proporţionale cu*:

$$\frac{\lambda_b + \lambda_c}{2a} \quad , \quad \frac{\lambda_c + \lambda_a}{2b} \quad , \quad \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2c} . \qquad (3)$$

Observ mai întâi că λ_a, λ_b, λ_c fiind pozitivi, există un triunghiu Δ având ca laturi: $\lambda_b + \lambda_c$, $\lambda_c + \lambda_a$, $\lambda_a + \lambda_b$. Aceasta fiindcă inegalităţile de condiţie:

$$\lambda_b + \lambda_c < (\lambda_c + \lambda_a) + (\lambda_a + \lambda_b), \text{ etc.}$$

sunt evident satisfăcute. Există deci şi două puncte M' şi M'' simetrice în raport cu cercul circumscris, ale căror triunghiuri podare sunt asemenea cu triunghiul Δ. (Vârfurile situate pe BC se opun laturilor proporţionale cu $\lambda_b + \lambda_c, \ldots$ etc.). Distanţele la vârfuri ale punctelor M' şi M'' astfel determinate sunt proporţionale cu cantităţile (3).

2. Acest punct fiind reamintit îmi propun să determin pe α, β şi γ *pozitivi* astfel că pentru orice punct M din plan să fie posibil a se construi un triunghiu având ca laturi αl, βm, γn.

Pentru aceasta este necesar şi suficient să avem:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\alpha l + \beta m + \gamma n > 0, \\ b_1 &= \alpha l - \beta m + \gamma n > 0, \\ c_1 &= \alpha l + \beta m - \gamma n > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Inlocuind pe l, m şi n prin valorile date de egalităţile (2), se obţine:

$$a_1 = \frac{a\lambda_a(\beta c + \gamma b) + b\lambda_b(\gamma a - \alpha c) + c\lambda_c(-\alpha b + \beta a)}{2abc}$$

$$b_1 = \frac{a\lambda_a(-\beta c + \gamma b) + b\lambda_b(\gamma a + \alpha c) + c\lambda_c(\alpha b - \beta a)}{2abc}$$

$$c_1 = \frac{a\lambda_a(\beta c - \gamma b) + b\lambda_b(-\gamma a + \alpha c) + c\lambda_c(\alpha b + \beta a)}{2abc}.$$

Pentru ca a, b şi c, să fie pozitivi este necesar şi suficient să avem simultan:

$$\begin{aligned} \gamma a - \alpha c \geqq 0 \quad , \quad -\alpha b + \beta a \geqq 0 \\ -\beta c + \gamma b \geqq 0 \quad , \quad \alpha b - \beta a \geqq 0 \\ \beta c - \gamma b \geqq 0 \quad , \quad -\gamma a + \alpha c \geqq 0 \end{aligned}$$

Este necesar, fiindcă una singură din aceste condiţiuni nefiind satisfăcută se pot alege λ_a, λ_b, λ_c în aşa mod ca a_1, b_1 sau c_1 să nu mai fie pozitivi. Astfel pentru:

$$\gamma a - \alpha c < 0$$

este evident că putem determina λ_a, λ_b, λ_c pozitivi aşa ca să avem:

$$a\lambda_a(\beta c + \gamma b) + b\lambda_b(\gamma a - ac) + c\lambda_c(-\alpha b + \beta a) < 0$$

a_1 corespunzător punctelor M' şi M'', determinate la § 1, este negativ.

Rezultă în definitiv, că *pentru a se putea construi un triunghiu având ca laturi* α.AM, β.BM, γ.CM *punctul* M *fiind oricare, este necesar şi suficient să avem:*

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}. \tag{5}$$

Este dela sine înţeles că una, oricare din inegalităţile (4) poate fi verificată, pentru toate punctele din plan, fără ca α, β şi γ să satisfacă egalităţilor (5). Aşa de exemplu, pentru a avea $a_1 > 0$ este necesar şi suficient să avem:

$$\gamma a - \alpha c \geqq 0 \quad \text{şi} \quad -\alpha b + \beta a \geqq 0.$$

In acest caz trebue să avem:

$$\beta = \frac{b}{a}\alpha + \beta_1 \quad , \quad \gamma = \frac{c}{a}\alpha + \gamma_1$$

β_1 şi γ_1 fiind pozitivi. Inegalitatea $a_1 > 0$ devine acum:

$$\alpha(-al + bm + cn) + al + m\beta_1 + n\gamma_1) > 0 \tag{6}$$

ceea ce este evident.

Aceasta dovedeşte de asemeni, că inegalităţile:

$$\lambda_a \geqq 0 \quad , \quad \lambda_b \geqq 0 \quad , \quad \lambda_c \geqq 0$$

sunt cele mai bune în felul lor, orice altă inegalitate de aceeaşi natură, obţinându-se ca şi inegalitatea (6), prin adăugarea unor termeni pozitivi.

In particular, dacă a este cea mai mare latură a triunghiului, inegalitatea cunoscută:

$$-l + m + n > 0$$

este consecinţă a inegalităţii $\lambda_a \geqq 0$, fiindcă avem:

$$(-al + bm + cn) + (a - b)\ m + (a - c)\ n = a(-l + m + n).$$

3. Imi propun acum să arăt că în cazul când α, β şi γ nu verifică egalităţile (5) există totuşi puncte M, astfel ca să se poată construi triunghiuri având laturile egale cu α.AM, β.BM, γ.CN.

Insemnăm cu Γ_a, Γ_b, Γ_c locul geometric al punctelor pentru care avem respectiv $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$. Curbele Γ sunt analagmatice. Fiindcă dacă punctul M' se găseşte pe una din

aceste curbe, simetricul său M'' în raport cu cercul circumscris se găseşte pe aceeaşi curbă, deoarece avem:

$$\frac{AM'}{AM''} = \frac{BM'}{BM''} = \frac{CM'}{CM''}.$$

Dacă avem:

$$(-\alpha+\beta+\gamma)\ (\alpha-\beta+\gamma)\ (\alpha+\beta-\gamma) \neq 0,$$

cele trei curbe Γ_a, Γ_b, Γ_c sunt cuartice, închise, fără puncte reale la infinit. Astfel pentru:

$$-\alpha+\beta+\gamma \neq 0$$

pe cercul O_ρ, de centru O şi de rază ρ, nu există niciun punct real de al cuarticei Γ_a, când ρ este suficient de mic sau suficient de mare. M fiind un punct pe cercul O_ρ avem întradevăr:

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} \leqq \frac{BM}{AM} \quad \text{sau} \quad \frac{CM}{AM} \leqq \frac{\rho+R}{\rho-R}$$

pentru $R > \rho$, şi

$$\frac{\rho-R}{\rho+R} \leqq \frac{BM}{AM} \quad \text{sau} \quad \frac{CM}{AM} \leqq \frac{\rho+R}{\rho-R}$$

pentru $R > \rho$. Deci şi pentru $\rho \to 0$ şi pentru $\rho \to \infty$ avem:

$$\lim \frac{BM}{AM} = \lim \frac{CM}{AM} = 1 \quad \therefore \quad \lim \left(\beta \frac{BM}{AM} + \gamma \frac{CM}{AM}\right) = \beta+\gamma \neq \alpha.$$

Am arătat astfel că, în general, cuarticele Γ nu au puncte reale la infinit. Dacă însă α, β şi γ sunt astfel ca una din inegalităţile (4) să poată fi verificată pentru toate punctele din plan, cuartica Γ corespunzătoare nu are puncte reale nici la distanţă finită.

Observăm acum că două din curbele Γ, de exemplu Γ_b şi Γ_c nu pot avea puncte comune reale. In acest caz am avea:

$$\alpha l - \beta m + \gamma n = 0$$
$$\alpha l + \beta m - \gamma n = 0$$

deci, sau $\alpha = 0$ ceea ce nu are sens, sau $l = 0$, şi atunci punctul comun coincide cu A, dacă avem: $\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$ [1]) ceea ce am exclus dela început.

---

1) Este uşor de văzut că dacă această relaţiune este verificată curbele Γ_b şi Γ_c sunt tangente în A.

Cuarticele Γ_a, Γ_b, Γ_c fiind închise şi neavând puncte comune reale, la distanţă finită rezultă că există o regiune din plan ce le este exterioară. Punctele situate în această regiune exterioară, convin problemei noastre.

In cazul particular când avem:

$$\alpha = \beta + \gamma$$

curba Γ_a este o cubică şi prin urmare posedă puncte reale la infinit. Curbele Γ_b, Γ_c rămân însă tot de gradul al 4-lea neputând avea în plus şi

$$\beta = \alpha + \gamma \quad \text{sau} \quad \gamma = \alpha + \beta$$

fiindcă atunci γ sau β ar fi nuli, ceea ce nu are sens pentru problema noastră.

Se poate demonstra ca mai sus, că şi în cazul când una din curbele Γ se ridică la o cubică, există puncte M astfel ca să se poată construi triunghiuri având laturile egale cu $\alpha \cdot AM$, $\beta \cdot BM$, $\gamma \cdot CM$.

ŞERBAN GHEORGHIU.

PROPRIETĂŢI ALE VÂRFURILOR UNUI TETRAEDRU IN RAPORT CU ARIILE FEŢELOR CARE TREC PRIN ACESTE VÂRFURI

Résumé. Étant donnés les points A_1, A_2, A_3 et trois nombres p_1, p_2, p_3 les points S qui vérifient les relations

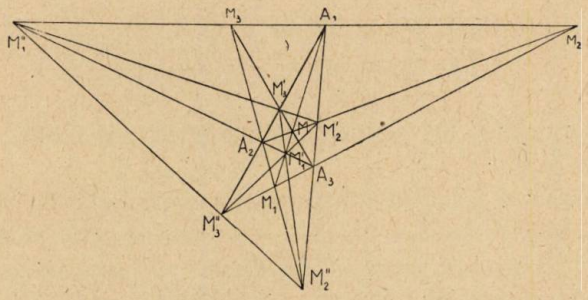
$$\frac{\text{aire } SA_2A_3}{p_1} = \frac{\text{aire } SA_3A_1}{p_2} = \frac{\text{aire } SA_1A_2}{p_3}$$

sont sur une quartique (S) de première espèce, intersection de trois cônes du second degré avec les sommets A_1, A_2, A_3. La projection de la courbe sur le plan $A_1A_2A_3$ est une hyperbole équilatère. Les sections des trois cônes par un plan parallèle à $A_1A_2A_3$, sont des hyperboles, dont les centres ont pour projection sur le plan $A_1A_2A_3$ les points A_1, A_2, A_3, et les asymptotes ont comme projections sur le plan $A_1A_2A_3$ les droites A_1M_1', A_1M_1''; A_2M_2', A_2M_2''; A_3M_3', A_3M_3''; les points $M_1', \ldots M_3''$ étant donnés par $A_2M_1' : M_1'A_3 = -A_2M_1'' : M_1''A_3 = p_3 : p_2$, $A_3M_2' : M_2'A_1 = -A_3M_2'' : M_2''A_1 = p_1 : p_3$, $A_1M_3' : M_3'A_2 = -A_2M_3'' : M_3''A_2 = p_2 : p_1$. La courbe (5) passe par les points M, M_1, M_2, M_3 du plan $A_1A_2A_3$, respectivement les intersections des droites $M \equiv (A_1M_1', A_2M_2', A_3M_3')$, $M_1 \equiv (A_1M_1', A_2M_2'', A_3M_3'')$, $M_2 \equiv (A_2M_2', A_3M_3'', A_1M_1'')$, $M_3 \equiv (A_3M_3', A_1M_1'', A_2M_2'')$.

1. Să considerăm un tetraedru $SA_1A_2A_3$ şi fie M_1' şi M_1'', M_2' şi M_2'', M_3' şi M_3'' intersecţiile muchiilor A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 cu planele bisectoare interioare şi exterioare ale diedrelor SA_1, SA_2, SA_3. Să notăm cu SM intersecţia bisectoarelor interioare ale diedrelor SA_1, SA_2, SA_3; SM_1 intersecţia bisectoarelor interior al lui SA_1 şi exterioare ale diedrelor SA_2, SA_3; SM_2 intersecţia bisectoarelor interior al lui SA_2 şi exterioare ale lui SA_3 şi SA_1; SM_3 intersecţia bisectoarelor interior al lui SA_3 şi exterioare ale lui SA_1 şi SA_2. M şi $M_1'M_3''M_2''$ sunt centrul şi axa de omologie a triunghiurilor omologice $A_1A_2A_3$ şi $M_1'M_2'M_3'$. M_1'' şi M_1', M_2'' şi M_2', M_3'' şi M_3' separă armonic respectiv pe A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2.

2. Tetraedrele $SA_1A_2M_1'$, $SA_3A_1M_1'$ având aceeaşi bază SA_1M_1', raportul volumelor este egal cu raportul înălţimilor, sau cu $A_2M_1' : M_1'A_3$. Considerate ca având acelaşi vârf M_1', raportul lor este egal cu aria SA_1A_2 : aria SA_3A_1. Se obţine proprietatea cunoscută [1])

$$\frac{\text{aria } SA_1A_2}{\text{aria } SA_3A_1} = \frac{A_2M_1'}{M_1'A_3}.$$



3. SM fiind intersecţia bisectoarelor interioare ale diedrelor SA_1, SA_2, SA_3, tetraedrele SMA_2A_3, SMA_3A_1, SMA_1A_2 au aceeaşi înălţime, începând dela vârful S, sau începând dela vârful M (ca egal depărtat de feţe). Deci, volumele sunt proporţionale cu feţele opuse lui S şi cu feţele opuse lui M, şi avem

$$\frac{\text{aria } SA_1A_2}{\text{aria } MA_1A_2} = \frac{\text{aria } SA_2A_3}{\text{aria } MA_2A_3} = \frac{\text{aria } SA_3A_1}{\text{aria } MA_3A_1}.$$

---

1) ROUCHÉ et COMBEROUSSE, Traité de Géométrie, II, 8-e édit., questions proposées 618, 619, p. 518.

4. Insemnând cu α, β, γ trei numere proporţionale cu ariile MA_2A_3, MA_3A_1, MA_1A_2, şi M_1' fiind intersecţia dreptelor A_1M şi A_2A_3 raportul ariilor MA_3A_1, MA_1A_2 este egal cu raportul distanţelor punctelor A_3 şi A_2 la A_1M, care este egal cu $M_1'A_3'$: A_2M_1' şi deci avem

$$\frac{M_1'A_2}{M_1'A_3} = -\frac{M_1''A_2}{M_1''A_3} = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{M_2'A_3}{M_2'A_1} = -\frac{M_2''A_3}{M_2''A_1} = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

$$\frac{M_3'A_1}{M_3'A_2} = -\frac{M_3''A_1}{M_3''A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\text{aria}\,SA_2A_3}{\alpha} = \frac{\text{aria}\,SA_3A_1}{\beta} = \frac{\text{aria}\,SA_1A_2}{\gamma}.$$

Ariile feţelor SA_2A_3, SA_3A_1, SA_1A_2 *sunt proporţionale cu* α, β, γ, *coordonatele baricentrice ale lui* M *în raport cu triunghiul* $A_1A_2A_3$.

5. *Intr'un tetraedru* $SA_1A_2A_3$, *urmele* SM_1'', SM_2'', SM_3'' *ale fiecărui bisector exterior pe faţa opusă, sunt în acelaşi plan.* Avem

$$\frac{M_2''A_3}{M_2''A_1}\,\frac{M_3''A_1}{M_3''A_2}\,\frac{M_1''A_2}{M_1''A_3} = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\gamma}{\beta} = 1,$$

punctele M_1'', M_2'', M_3'' sunt colineare, urmele SM_1'', SM_2'', SM_3'' sunt în acelaşi plan.

6. Avem, de asemenea, proprietatea cunoscută: *Intr'un tetraedru* $SA_1A_2A_3$, *urmele fiecărei muchii pe bisectorul exterior al diedrului opus sunt în acelaşi plan şi formează cele şase vârfuri ale unui patrulater complet.* Fie M_1'', M_2'', M_3'' urmele celor trei muchii ale feţei $A_3A_2A_1$ şi M_1, M_2, M_3 acelea ale muchiilor plecând din S. Am văzut că cele trei puncte situate în aceeaşi faţă sunt colineare, $M_1''M_3''M_2''$, $M_1''M_3M_2$, $M_2''M_1M_3$, $M_3''M_1M_2$ şi formează un patrulater complet.

7. *Să considerăm problema inversă. Fiind un triunghiu* $A_1A_2A_3$ *şi trei numere* p_1, p_2, p_3, *să se găsească punctele* S *astfel ca*

$$(1) \qquad \frac{\text{aria}\,SA_2A_3}{p_1} = \frac{\text{aria}\,SA_3A_1}{p_2} = \frac{\text{aria}\,SA_1A_2}{p_3}.$$

Să luăm planul $A_1A_2A_3$ ca xOy, şi fie $S(x, y, z)$, $A_i(x_i, y_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$, coordonatele punctelor S, A_1, A_2, A_3. Să însemnăm cu $a_1 = A_2A_3$, $a_2 = A_3A_1$, $a_3 = A_1A_2$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Avem

$$4(\text{aria } SA_1A_2)^2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ 0 & x_1 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 \end{vmatrix}^2 = \Delta_3^2 + a_3^2 z^2.$$

Relaţiile (1) ridicate la patrat dau

$$(2) \qquad p_1^{-2}\Delta_1^2 + p_1^{-2}a_1^2z^2 = p_2^{-2}\Delta_2^2 + p_2^{-2}a_2^2z^2 \pm p_3^{-2}\Delta_3^2 + p_3^{-2}a_3^2z^2,$$

$$\frac{\Delta_1^2 + a_1^2z^2}{p_1^2} = \frac{\Delta_2^2 + a_2^2z^2}{p_3^2}, \quad \frac{\Delta_2^2 + a_2^2z^2}{p_2^2} = \frac{\Delta_3^2 + a_3^2z^2}{p_3^2}, \quad \frac{\Delta_3^2 + a_3^2z^2}{p_3^2} = \frac{\Delta_1^2 + a_1^2z^2}{p_1^2},$$

care reprezintă conuri de gradul al doilea, cu vârfurile în A_3, A_2, A_1.

Aceste conuri trec prin aceeaşi curbă, a cărei proiecţie pe planul xOy se obţine eliminând pe z între relaţiile (2) şi are ecuaţia

$$(3) \qquad \Delta_1^2(a_2^2p_3^2 - a_3^2p_2^2) + \Delta_2^2(a_3^2p_1^2 - a_1^2p_3^2) + \Delta_3^2(a_1^2p_2^2 - a_2^2p_1^2) = 0.$$

Suma coeficienţilor lui x^2 şi y^2 este

$$[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2](a_2^2p_3^2 - a_3^2p_2^2) + \ldots$$
$$= a_1^2(a_2^2p_3^2 - a_3^2p_2^2) + a_2^2(a_3^2p_1^2 - a_1^2p_3^2) + a_3^2(a_1^2p_2^2 - a_2^2p_1^2) = 0.$$

Deci, *punctele căutate sunt pe o curbă* (S), *a cărei proiecţie pe planul* $A_1A_2A_3$, $z = 0$, *este o iperbolă echilateră.*

8. Secţiunile conurilor (2) cu planul bazei $A_1A_2A_3$, $z = 0$, sunt dreptele

$$\frac{1}{p_3^2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{p_{-1}^2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{p_{-2}^2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & p_1 & 1 \end{vmatrix}^2$$

care dau punctele M, M_1, M_2, M_3. Deci, *curba* (S) *trece prin aceste puncte* care se pot construi. Unul din ele fiind M, avem

$$\frac{\text{aria } MA_2A_3}{p_1} = \frac{\text{aria } MA_3A_1}{p_2} = \frac{\text{aria } MA_1A_2}{p_3}.$$

M_1' fiind intersecția dreptelor A_1M, A_2A_3, raportul ariilor MA_3A_1, MA_1A_2 este egal cu raportul distanțelor punctelor A_3 și A_2 la A_1M, care este egal cu $M_1'A_3 : A_2M_1'$ și deci avem $A_2M_1' : M_1'A_3 = p_3 : p_2$. Insemnând cu M_1' și M_1'' punctele de intersecție ale lui A_2A_3 cu A_1MM_1 și $M_2A_1M_3$; M_2' și M_2'' intersecțiile lui A_3A_3 cu A_2MM_2 și $M_3A_2M_1$; M_3' și M_3'' intersecțiile lui A_1A_2 cu A_3MM_1 și $M_1A_3M_2$, avem

$$A_2M_1' : M_1'A_3 = -A_2M_1'' : M_1''A_3 = p_3 : p_2,$$

$$A_3M_2' : M_2'A_1 = -A_3M_2'' : M_2''A_1 = p_1 : p_3,$$

$$A_1M_3' : M_3'A_2 = -A_1M_3'' : M_3''A_2 = p_2 : p_1.$$

Deci se pot construi punctele M_1' și M_1'', M_2' și M_2'', M_3' și M_3'', care separă armonic respectiv pe A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, căci numerele p_1, p_1, p_3 sunt date. Astfel se pot obține punctele M, M_1, M_2, M_3 din planul $A_1A_2A_3$, respectiv intersecția dreptelor

$(M \equiv (A_1M_1', A_2M_2', A_3M_3'), M_1 \equiv (A_1M_1', A_2M_2'', A_3M_3''),$

$M_2 \equiv (A_2M_2', A_3M_3'', A_1M_1''), M_3 \equiv (A_3M_3', A_1M_1'', A_2M_2'').$

9. *Secțiunile conurilor* (2) *cu un plan* $z = z_0$ *paralel cu* $A_1A_2A_3$ $(z = 0)$ *sunt iperbolele*

$$p_2^2\Delta_1^2 - p_1^2\Delta_2^2 = (p_1^2a_2^2 - p_2^2a_1^2)\,z_0^2,\ p_3^2\Delta_2^2 - p_2^2\Delta_3^2 = (p_2^2a_3^2 - p_3^2a_2^2)\,z_0^2,$$

$$p_1^2\Delta_3^2 - p_3^2\Delta_1^2 = (p_3^2a_1^2 - p_1^2a_3^2)\,z_0^2,$$

cu *asimptotele*

$$p_2\Delta_1 \pm p_1\Delta_2 = 0,\ p_3\Delta_2 \pm p_2\Delta_3 = 0,\ p_1\Delta_3 \pm p_3\Delta_1 = 0,\quad z = z_0$$

care *au ca proiecție pe planul* $A_1A_2A_3$ $(z = 0)$ *dreptele* A_3M_3', A_3M_3'' ; A_1M_1', A_1M_1'' ; A_2M_2', A_2M_2''. *Centrele iperbolelor au ca proiecție pe același plan punctele* A_3, A_1, A_2.

Eliminând z_0 între ecuațiile iperbolelor, se obține (3), care arată că cele patru puncte de intersecție ale curbei (S) cu un plan paralel cu $A_1A_2A_3$ sunt pe o iperbolă echilateră. Deci, punctele S care verifică relațiile

$$\frac{\text{aria } SA_2A_3}{p_1} = \frac{\text{aria } SA_3A_1}{p_2} = \frac{\text{aria } SA_1A_2}{p_3},$$

sunt pe o cuartică strâmbă de prima specie[1]) (intersecția a două

1) Să se vadă pentru bibliografie, GINO LORIA, Curve sghembe speciali, vol. I, p. 207.

suprafețe de gradul al doilea) și în fiecare plan paralel cu $A_1A_2A_3$ sunt în general patru puncte care corespund problemei.

10. *Cazuri particulare.* 1^0 $p_1 = p_2 = p_3$, aria SA_2A_3 = aria SA_3A_1 = aria SA_1A_2 = aria $A_1A_2A_3$. Avem cazul tetraedrului echifacial.

2^0. $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $A_1(0,0,0)$, $A_2(1,0,0)$, $A_3(0,1,0)$. Avem

$$\frac{y^2+z^2}{9} = \frac{(1-x-y)^2+zz^2}{1} = \frac{x^2+z^2}{4},$$

$$9x^2 - 4y^2 + 5z^2 = 0 \quad , \quad 4(1-x-y)^2 - x^2 + 7z^2 = 0.$$

Secțiunile cu $z = 0$ sunt dreptele

$$9x^2 - 4y^2 = 0,\ 4(1-x-y)^2 - x^2 = 0,$$

care dau punctele $\left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}\right)$, M, M_1, M_2, M_3. Secțiunile cu $z = 1$ sunt iperbola $9x^2 - 4y^2 + 5 = 0$, cu centrul (0, 0, 1) și direcțiile asimptotice $y = \pm\frac{3}{2}x$; și iperbola $4(1-x-y)^2 - x^2 + 7 = 0$ cu centrul (0, 1, 1) și direcțiile asimptotice $y = -\frac{1}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$. Iperbolele au o direcție asimptotică comună, $y = -\frac{3}{2}$ și construindu-le, se vede că se taie într'un singur punct. Adunând ecuațiile iperbolelor, se scoate valoarea lui y, și înlocuind în prima, avem

$$6x^3 + 12x^2 - 6x + 11 = 0.$$

Pentru a găsi numărul rădăcinilor reale, se construește curba $y = 3x^3 + 7x^2 - 3x$, care taie axa Ox în punctele de abscise $-\frac{7+\sqrt{85}}{6}$, 0, $\frac{-7+\sqrt{85}}{6}$. Ea este tăiată de paralela la Ox, $y = -\frac{11}{2}$, într'un singur punct cu abscisa mai mică decât $-\frac{7+\sqrt{85}}{6}$. Deci, iperbolele au un singur punct comun, există un singur punct S în planul $z = 1$.

3°. $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$, $A_1(0, 0, 0)$, $A_2(1, 0, 0)$, $A_3(0, 1, 0)$,

avem $$\frac{y^2 + z^2}{16} = \frac{(1 - x - y)^2 + 2z^2}{9} = \frac{x^2 + z^2}{4},$$

şi construind iperbolele, pentru

$$z = 1 \quad , \quad y^2 - 4x^2 = 3 \quad , \quad 4(1 - x - y)^2 - 9x^2 = 1,$$

se obţin două puncte de intersecţie, a căror poziţie este dată de curbele construite, deci două puncte S în planul $z = 1$.

N. ABRAMESCU.

NOTE MATEMATICE

4. *Asupra numerelor amiabile.* La pag. 657 a volumului XLIX al acestei reviste D-l P. POULET a scris un articol foarte interesant asupra numerelor *amiabile* sau *amicale* ori *prietene* şi unde dă 43 de perechi de asemenea numere, cele mai multe date până azi. Autorul spune că primul care s'a ocupat cu aceste numere ar fi fost EULER, care a dat 61 de perechi de asemenea numere. Se pare însă că aceste numere erau cunoscute şi de PITAGORA, căci el fiind întrebat de un cunoscut să i se spună *„ce este un amic?"* i-a spus că este *„acela care e altul eu însumi cum sunt 220 şi 284"*. Se spune însă că cu mult mai înainte Ebreii şi Indieni cunoşteau aceste două numere. O istorioară medievală neautentificată, spune că un prinţ indian al cărui număr în *gemantrie* (magia numerelor) era 284 căuta o logodnică cu Numărul 220, crezând că astfel fericirea lui matrimonială ar fi fost garantată de Ceruri. Numerele amiabile 220 şi 284 se întâlnesc şi la unii matemateciani arabi, cari le atribuiau proprietăţi miraculoase. Numele acelui matematician l-am pierdut; îl voiu da când voiu găsi fişa în care am notat aceasta.

I. IONESCU.

5. *Asupra unei probleme a lui* LAISANT. Intr'o culegere de probleme, LAISANT arată că:

„Dacă p_i *reprezintă numerele prime cu* N *şi mai mici ca el, iar* m *este un număr impar, atunci avem:*

$$\sum_1^n p_i^m - \frac{1}{2} N^m \cdot \varphi(N) = Mm.$$

Aceasta rezultă însă imediat din relaţia (15) „*Teoria Indicatorilor*“ pag. 71, unde:

$$\sum_1^n p_i^m + \sum_1^n C_m^1 \cdot p_1 p_n \cdot (p_1^{m-2} + p_n^{m-2})$$

$$+ \sum_1^n C_m^2 \cdot p_1 \cdot p_n \cdot (p_1^{n-4} + p_n^{m-4}) + \ldots = \frac{1}{2} N^m \cdot \varphi(N).$$

I. L.

6. *Notă de geometria triunghiului.* Fie

$$(\Gamma) \qquad l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$$

o conică circumscrisă triunghiului LMN. Centrul P al conicei are coordonatele:

$$\frac{\alpha}{l(-l+m+n)} = \frac{\beta}{m(l-m+n)} = \frac{\gamma}{n(l+m-n)}.$$

Tangentele în L, M, N formează un triunghiu QRS omologic cu LMN şi circumscris acestuia. Centrul de omologie T are coordonatele:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}$$

şi a fost numit, prin extindere, punctul lui LEMOINE al conicei (Γ).

Diametrul conjugat direcţiei:

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

faţă de conica (Γ) este:

$$\Sigma\, \alpha[m(u-v) + n(w-u)] = 0.$$

Deci diametrul conjugat direcţiei MN ($\alpha = 0$) este:

$$\alpha(m-n) + \beta l - \gamma l = 0,$$

adică dreapta PQ.

Analog, diametrele conjugate direcţiilor NL, LM faţă de conica (Γ) sunt respectiv PR şi PS.

Rezultă de aci următoarea construcție simplă a centrului unei conici înscrisă într'un triunghiu și circumscrisă altui triunghiu, înscris și omologic cu primul:

D *fiind un punct în planul triunghiului* ABC, A'B'C' *pedalul* D, *iar* A"B"C" *complimentarul lui* A'B'C', *triunghiurile* ABC *și* A"B"C" *sunt omologice, centrul de omologie fiind centrul conicei înscrisă în triunghiul* ABC *și circumscrisă triunghiului* A'B'C'.

P. P. DRĂGHICESCU.

7. *Compunerea vectorilor.* I. *Vectori concurenți.* Rezultanta a doi vectori OP_1 și OP_2 este dată de relația:

$$R = OP_1 + OP_2 = 2OC,$$

unde C este punctul situat la mijlocul segmentului P_1P_2 sau un centrul de greutate al punctelor P_1P_2 socotite de aceeași masă.

Voiu demonstra în cele ce urmează, printr'o metodă foarte simplă, că în cazul general, rezultanta a n vectori cu origina în punctul O și extremitățile în punctele $P_1 \dots P_n$, este dată de relația:

$$R = \sum_1^n OP_i = n\,OC,$$

unde C este centrul de greutate al punctelor P_i socotite de aceeași masă.

Există un singur punct care satisface relația:

$$\sum_1^n CP_i = 0.$$

Deoarece:

$OP_i = OC + CP_i$ putem scrie:

$$R = \sum_1^n OP_i = \sum_1^n (OC + CP_i) = n\,OC + \sum_1^n CP_i = n\,OC.$$

Se observă că punctul C este independent de poziția punctului O, fiind același pentru toate sistemele de n vectori concurenți cu extremitățile în punctele $P_1 \dots P_n$.

Considerând punctele O suficient de depărtate, pentru ca vectorii OP_i să poată fi socotiți egali și paraleli, rezultantele acestora vor trece prin centrul de greutate, care corespunde deci cu punctul C.

Pe cale analitică, ajungem la acelaşi rezultat, traducând într'un sistem de axe rectangulare relaţia vectorială:

$$\sum_1^n CP_i = 0.$$

Fie: (x_i, y_i, z_i) coordonatele punctului P_i şi (x, y, z) coordonatele punctului C.

Relaţia vectorială $\sum_1^n CP_i = 0$ este echivalentă cu:

$$\sum_1^n (x - x_i) = 0 \quad ; \quad \sum_1^n (y - y_i) = 0 \quad ; \quad \sum_1^n (z - z_i) = 0$$

de unde: $x = \frac{\sum_1^n x_i}{n} \qquad y = \frac{\sum_1^n y_i}{n} \qquad z = \frac{\sum_1^n z_i}{n}.$

Se observă că x, y, z, sunt coordonatele centrului de greutate al punctelor P_i de aceeaşi masă.

II. *Sistem de* n *vectori oarecare.*

Fie un sistem de n vectori O_iP_i. Putem reduce acest sistem în raport cu un punct oarecare N, la o rezultantă R şi la un moment M, egal cu suma momentelor vectorilor în raport cu N.

Rezultanta R este independentă de poziţia punctului N şi este egală cu suma vectorilor cu origina în N, echipolenţi cu vectorii daţi.

Voi demonstra, folosind aceiaşi metodă ca mai sus, că rezultanta R poate fi exprimată de relaţia:

$$R = \sum_1^n O_iP_i = n\,QC,$$

unde Q şi C sunt respectiv centrele de greutate ale punctelor O_i şi P_i, satisfăcând condiţiile:

$$\sum_1^n QO_i = 0 \quad \text{şi} \quad \sum_1^n CP_i = 0$$

deoarece: $O_iP_i = O_iQ + QP_i$, putem scrie:

$$R = \sum_1^n O_iP_i = \sum_1^n (O_iQ + QP_i) = \sum_1^n QP_i$$

căci

$$\sum_1^n O_iQ = -\sum_1^n QO_i = 0.$$

Mai departe, folosind rezultatele dela I avem:

$$R = \sum_{1}^{n} QP_i = n\,QC.$$

Vectorii concurenţi formează un caz particular, punctele O_i corespunzând toate cu punctul Q, care este centrul lor de greutate. Aceste rezultate remarcabile au aplicaţii importante în Mecanică şi Geometrie.

ING. P. POSTELNICU.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXIV. Nr. 7. Septembrie 1944. C-DOR I. LINTEŞ: Două teoreme de teoria numerelor. M. GHERMĂNESCU: Asupra problemei 1489. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

TEOFIL T. VESCAN. Memoriu de titluri şi lucrări. Ediţie provizorie. Bucureşti 1944.

DIVERSE

a) Lista membrilor societăţii „Gazeta Matematică"

In lista publicată în numărul precedent s'au strecurat unele erori regretabile pe care le rectificăm după cum urmează:

1°. La pag. 8 se introduce cu numărul de ordine 26:

1935, Aug. 22. BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. Conferenţiar definitiv Politechnica „Gh. Asachi".

2°. La pag. 12 se taie GHIOLU D. STAVRI, dela Nr. 91, D-sa fiind trecut şi la Nr. 101.

3°. La pag. 18 se taie ROMAŞCAN GEORGETA dela Nr. 206, D-sa fiind trecută la pag. 20 cu numele pe care-l poartă actualmente, prin căsătorie.

După aceste rectificări se schimbă numerele de ordine în consecinţă, numărul de ordine al ultimului membru devine 273.

b) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

DR. A. KLEYER. Lehrbuch der Gleichungen des 1-ten Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen, Buchstaben und Textaufgaben. Nach eigenen System. Stuttgart 1886.

OTTO PRANGE. Lehrbuch der Gleichungen mit Mehreren Unbekannten. Sammlung von 905 Zahlen, Buchstaben und Textaufgaben. Nach System KLEYER. Stuttgart 1889.

W. FR. SCHULER. Lehrbuch der Unbestimmten Gleichungen der ersten Grades (Diophantische Gleichungen) nach System KLEYER. Stuttgart 1891. Erstes Buch.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3913. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\varphi[A.B] = \varphi[A.\varphi(B)]$$

în care $\varphi(N)$ *înseamnă numărul numerelor prime cu* N *şi mai mici ca el.*

I. B. FLORESCU.

Din chiar definiţie rezultă că $\varphi(N) < N$, şi dacă A şi B sunt două numere prime între ele $\varphi(A.B) = \varphi(A).\varphi(B)$, deci dacă considerăm numerele

$$M = Q_1R \quad \text{şi} \quad N = Q_2P$$

în care Q_1 şi Q_2 conţin aceiaşi factori primi iar R şi P sunt numere prime între ele şi prime cu fiecare din numerele Q_1 şi Q_2 vom avea evident

$$\varphi(MN) = Q_1\varphi(Q_2)\ \varphi(R)\ \varphi(P) \leqslant M\varphi(N) \qquad (1)$$

egalitatea neavând loc de cât când R = 1. De asemeni

$$\varphi(M.N) \geqslant \varphi(M)\ \varphi(N) \qquad (2)$$

egalitatea neavând loc de cât dacă Q_1 sau Q_2 este 1, adică atunci când M este prim cu N. In baza acestora, avem pentru necunoscutele din enunţ

$$\varphi(A.B) \geqslant \varphi(A)\ \varphi(B) \quad \text{şi} \quad \varphi[A.\varphi(B)] \leqslant \varphi(A)\ \varphi(B) \qquad (3)$$

Pentru ca ecuaţia din enunţ să fie satisfăcută, trebue ca în (3) să avem pe A *prim* cu B iar $\varphi(B)$ să nu se dividă cu alte numere prime de cât acelea care divid pe A. Rezultă deci ca B trebue să fie prim cu $\varphi(B)$ ceia ce necesită

$$B = p_1.p_2 \ldots p_r \quad p_1 < p_2 < \ldots < p_2 \qquad (4)$$

unde fiecare din numerele p_i sunt numere prime absolute şi astfel în cât $p_i - 1$ să fie prim cu $p_1, p_2, \ldots p_r$.

Avem

$$\varphi(B) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_r - 1) = p^a q^b \ldots s^c \qquad (5)$$

unde $p, q, \ldots s$ sunt primi cu toate numerele p_i iar $p, q, \ldots s$ divid pe A deci

$$A = p^\alpha q^\beta \ldots s^\gamma M \qquad \alpha \geqslant 1,\ \beta \geqslant 1, \ldots \gamma \geqslant 1$$

M fiind prim atât cu numerele p_i cât şi cu $p, q, \ldots s$. Formulele (4) şi (5) constitue soluţiile problemei pentru A şi B.

Iată toate soluţiile pentru $B < 50$.

$B = 2$, $A = 2Q + 1$	$B = 23$, $A = 2^\alpha 11^3 Q$
$B = 3$, $A = 2^\alpha Q$	$B = 29$, $A = 2^\alpha 7^\beta Q$
$B = 5$, $A = 2^\alpha Q$	$B = 31$, $A = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma Q$
$B = 7$, $A = 2^\alpha 3^\beta Q$	$B = 37$, $A = 2^\alpha 3^\beta Q$
$B = 11$, $A = 2^\alpha 5^\beta Q$	$B = 33$, $A = 2^\alpha 5^\beta Q$
$B = 13$, $A = 2^\alpha 3^\beta Q$	$B = 35$, $A = 2^\alpha 3^\beta Q$
$B = 15$, $A = 2^\alpha Q$	$B = 41$, $A = 2^\alpha 5^\beta Q$
$B = 17$, $A = 2^\alpha Q$	$B = 43$, $A = 2^\alpha 3^\beta 7^\gamma Q$
$B = 19$, $A = 2^\alpha 3^\beta Q$	$B = 47$, $A = 2^\alpha 23^\beta Q$

unde $\alpha, \beta, \ldots \gamma \geqslant 1$ iar Q este prim atât cu B cât şi cu ceilalţi factori primi ai lui B.

I. B. FLORESCU.

Notă. 1°. Cu un raţionament analog se găseşte că nu putem avea

$$\varphi(A \cdot B) = \varphi[A\varphi_i(B)] \qquad i \geqslant 2.$$

Soluţia acestei probleme poate servi la rezolvarea următoarei probleme clasice: *„La un indicator dat, corespund cel puţin două numere"*.

I. B. F.

2°. Problema 3413 a fost rezolvată parţial, pentru unele cazuri particulare numai, de către D-l GH. GH. VRÂNCEANU (cl. VI Lic. militar „Mihai Viteazul", Timişoara).

PROBLEMA 4671. *Intr'un rezervor circular drept, de dimensiuni date, se află apă până la o înălțime oarecare. Culcând cilindrul pe o generatoare, apa se ridică până la aceeași înălțime. Care este acea înălțime?*

ION SCHILERU-DILI.

Dacă R reprezintă raza cercului de bază a cilindrului, iar h săgeata segmentului de cerc, care ar reprezenta și înălțimea până la care se ridică apa când cilindrul este culcat pe o generatoare, suprafața segmentului circular este dată de integrala:

$$2\int_{R-h}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,.\,dx$$

a cărei valoare este cunoscută ca fiind egală cu:

$$2\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_{R-h}^{R}$$

$$= R^2 \arcsin 1 - 2\left[\frac{R-h}{2}\sqrt{R^2 - (R-h)^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R-h}{R}\right]$$

$$= R^2 \arcsin 1 - R^2\left[\frac{R-h}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{R-h}{R}\right)^2} + \arcsin\frac{R-h}{R}\right].$$

Insemnând prin L lungimea cilindrului, volumul ocupat de apă când acesta stă culcat pe o generatoare, este:

$$\left[\arcsin 1 - \frac{R-h}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{R-h}{R}\right)^2} - \arcsin\frac{R-h}{R}\right] R^2 L.$$

Când cilindrul este vertical, conform enunțului problemei, volumului ocupat de apă este: $\pi R^2 h$. Va trebui să avem:

$$\left[\arcsin 1 - \frac{R-h}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{R-h}{R}\right)^2} - \arcsin\frac{R-h}{R}\right] R^2 L = \pi R^2 h$$

$$\therefore \quad \arcsin 1 - \frac{R-h}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{R-h}{R}\right)^2} - \arcsin\frac{R-h}{R} - \pi\frac{h}{L} = 0$$

Făcând substituţia:

$$\frac{R-h}{R}=y \quad \therefore \quad (1) \quad h=R(1-y)$$

şi însemnând raportul $\frac{R}{L}=k$, obţinem:

$$(2) \quad \arcsin 1-y\sqrt{1-y^2}-\arcsin y-\pi k(1-y)=0.$$

Valoarea lui y, respectiv a lui h, rezultă din rezolvarea acestei ecuaţii în raport cu y.

In acest scop vom studia variaţia funcţiunei:

$$k=\frac{\arcsin 1-y\sqrt{1-y^2}-\arcsin y}{\pi(1-y)}$$

în intervalul -1 la 1 căci $-1<y<1$. Derivata funcţiunii este:

$$k'=\frac{\arcsin 1-\arcsin y-(2-y)\sqrt{1-y^2}}{\pi(1-y)^2}$$

Rădăcinile derivatei sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$\arcsin 1-\arcsin y-(2-y)\sqrt{1-y^2}=0.$$

In figură s'au trasat grafic curbele

$$z=\arcsin 1-\arcsin y \quad \text{şi} \quad z=(2-y)\sqrt{1-y^2},$$

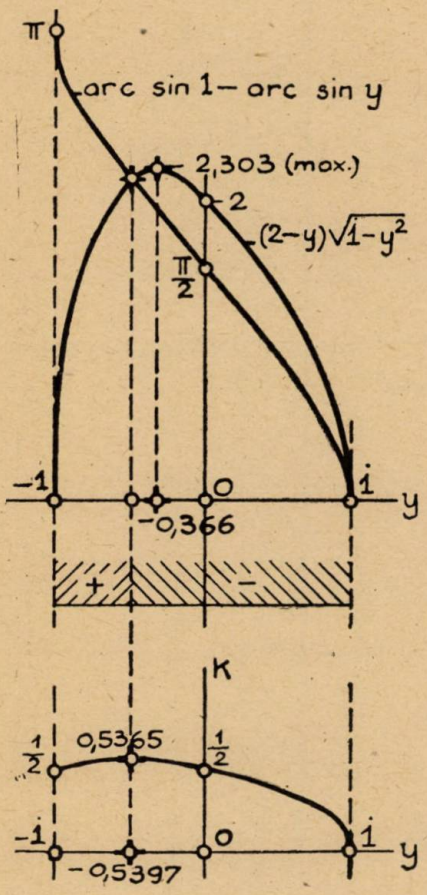
din cari se observă că pe lângă soluţia $y=1$, ecuaţia mai admite o rădăcină cuprinsă între -1 şi $-0{,}366$.

Aplicând metoda lui NEWTON pentru găsirea sa, se găseşte $y=-0{,}5397$. Ţinând seamă că numitorul derivatei este întotdeauna pozitiv, semnul acesteia este indicat haşurat în figură.

A doua valoare a lui y, din rădăcinile derivatei, corespunde unui maximum al expresiunii lui k. Valoarea acestui maximum este $k=0{,}5365$. In intervalul specificat, tabloul variaţiunii lui k este următorul:

y	-1	$-0{,}5397$	0	1
k'	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}-2$	$-\infty$
k	$\frac{1}{2}$ ↗	$0{,}5365$ (max.) ↘	$\frac{1}{2}$ ↘	0

Pentru $y = 1$, atât k precum şi derivata sa capătă forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Prin aplicarea regulii lui HÔSPITAL se ajunge la valorile indicate în tablou. Cu aceste date, variaţiunea grafică a lui k este trasată în figură.



Din examinarea sa rezultă următoarele:

Ecuaţiunea (2) admite rădăcini reale numai pentru valorile:

$$0{,}5365 > k > 0$$

şi anume:

Pentru $0{,}5365 > k > 0{,}5$, are două rădăcini reale, una cuprinsă între

$$-1 \text{ şi } -0{,}5397,$$

iar cealaltă între

$$-0{,}5397 \text{ şi } 0.$$

Pentru $k = 0{,}5$, are două rădăcini egale cu 0,5.

Pentru $0{,}5 > k > 0$, are o rădăcină reală.

Pentru o valoare a lui k dată, y odată determinat prin rezolvarea ecuaţiei (2) prin metodele obişnuite, valorile corespunzătoare lui h, pentru un R dat, se deduc cu ajutorul expresiei (1).

Lungimea L a cilindrului rezultă imediat.

D-l E. N. WEGENER (Bucureşti) a trimis o bună soluţie stabilind ecuaţia, care dă unghiul la centru corespunzător segmentului circular în secţiune, dar nu a rezolvat şi discutat acea ecuaţie.

ING. ŞT. S. MIHĂIESCU.

PROBLEMA 5172. *Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relaţiile*

$$(I)\quad \sum \frac{\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{r-p-2R}{r+p+2R}$$

$$(II)\quad \sum \frac{\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{r+p-2R}{r+p+2R}$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

SLT. M. GRUMĂZESCU.

Soluţia I, dată de D-l VICTOR SUHĂŢEANU-BÂRLEA (clasa a VII-a Liceul Militar „Nic. Filipescu", Târgovişte).

$$\frac{\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+1}=\frac{r_a-p}{r_a+p}.$$

Dar r_a, r_b, r_c sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^3-(4R+r)\,x^2+p^2x-p^2r=0$$

şi formând transformata unde

$$y=\frac{x-p}{x+p}\quad,\quad \text{deci } x=\frac{p(1+y)}{1-y}$$

se găseşte ecuaţia

$$(p+r+2R)\,y^3+(p-r+2R)\,y^2+(p+r-2R)\,y+p-r-2R=0$$

ale cărei rădăcini fiind

$$\frac{r_a-p}{r_a+p},\ \frac{r_b-p}{r_b+p},\ \frac{r_c-p}{r_c+p},$$

rezultă din relaţiile lor cu coeficienţii, egalităţile din enunţ.

Soluția II, dată de D-nii: ȘT. C. TILICĂ (elev ofițer Școala Geniu, București), M. AL. VASILESCU-STABU (clasa a VII-a, Lic. G. Lazăr, București).

Partea I a expresiei (I) se scrie

$$\sum \frac{\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}}=\sum\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+1}$$

$$=\frac{3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}-\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}-3}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}+1}$$

$$=\frac{r-p-2R}{r+p-2R},$$

întru cât

$$\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}$$ (C. P. Tr. de V. CRISTESCU, ed. II, p. 9)

$$\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$$ (Ex. Tr. par F. G. M., p. 266)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$$ (Ex. Tr. par F. G. M., p. 264).

Partea I a expresiei (II) se scrie

$$\sum\frac{\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}-\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}}=\sum\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+1}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1}$$

$$=\frac{r+p-2R}{r+p+2R},$$

în baza relațiilor de mai sus.

Alte soluţii date de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (bacalaureat), CONSTANTIN PANTELIMON, ALEXANDRU I. ROHR, JOE SEGAL, VICTOR V. ALEXANDRESCU, CONSTANTIN I. ARABU, GHEORGHE V. DOVGAN, IOAN G. FULGEANU, GHEORGHE D. CÂRDEIU, ADRIAN V. PÂRVU, STELIAN D. IONESCU, MIRCEA PLETEA, VASILE C. ROLEA, HERMAN L. REISCHER, IOAN I. STAMATE, IOAN I. SCURTU, PETRE G. ŢOCU, MIRCEA G. TOFAN, EUG. G. VIJELIE, MATEI CHINTESCU, CONST. I. MOCANU, MIREL D. STOENESCU, IOAN C. DUMITRU, PAUL P. DRĂGHICESCU.

C. I. B.

PROBLEMA 5221. *Se dau fixe în spaţiu, două cercuri* (C) *şi* (C') *şi o dreaptă* D, *oarecare. Se cere învelitoarea planului radical al sferelor trecând prin cercurile* (C) *şi* (C') *şi având centrele într'un plan ce trece prin dreapta* D.

ADRIAN GHEORGHIU.

Soluţie. Centrele sferelor trecând prin cercurile (C) şi (C') se găsesc pe dreptele d şi d' respectiv perpendiculare pe planurile celor două cercuri, în centrele lor. Un plan dus prin dreapta D, fixă, depinde de un parametru şi taie cele două drepte d şi d' în punctele ω şi ω' centrele sferelor ce trec prin cercurile (C) şi (C'). Planul radical al acestor sfere depinde deci de un parametru.

Vom arăta întâi că acest plan radical trece printr'un punct fix.

Se ştie că două sfere admit un *plan radical*, iar trei sfere admit un *ax radical*. Introducând o a patra sferă, planele radicale ale acesteia cu fiecare din primele trei sfere se întâlnesc neapărat într'un punct care are deci puteri egale faţă de toate cele patru sfere şi se găseşte atunci pe axul radical al primelor trei sfere. Aşa dar patru sfere admit un *centru radical*. Se mai poate enunţa: Cele şase *plane radicale* a patru sfere, două câte două au trei câte trei, patru *axe radicale* comune, şi toate au un punct comun: *centrul radical* al celor patru sfere.

Două cercuri oarecari în spaţiu sunt determinate de patru sfere, deci admit un *centru radical*, evident pe dreapta de intersecţie a planelor lor.

Altfel se ajunge la acelaşi rezultat, rabatând unul din cercuri pe planul celuilatl în jurul dreptei de intersecţie a planelor lor şi construind în acest plan axul radical al celor două cercuri, ax

ce taie dreapta de intersecţie a planelor cercurilor într'un punct, singurul ce are puteri egale faţă de cele două cercuri din spaţiu, şi deci faţă de sferele ce trec prin ele.

Aşa dar înfăşurătoarea planului radical din enunţ este un con cu vârful în centrul radical P *al cercurilor* (C) *şi* (C').

Acest plan radical — al sferelor (ω) şi (ω') este *planul perpendicular din punctul* P *la dreapta* ωω'.

Dreapta ωω' variază sprijinindu-se pe trei drepte: *d, d'* şi D după cum rezultă din construcţie; deci generează *hiperboloidul cu o pânză.*

Problema revine dar la următoarea:

A găsi învelitoarea planelor perpendiculare dintr'un punct fix P, *la generatoarele de acelaşi sistem ale unui hiperboloid cu o pânză.*

Având, în coordonate rectangulare, ecuaţia hiperboloidului cu o pânză:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad (1)$$

fie ecuaţiile generatoarelor G_λ:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Sistemul se transformă uşor în următorul, în care se pun în evidenţă parametrii directori ai generatoarelor G_λ:

$$\frac{x-\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{a}{2}}{\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{a}{\lambda}}=-\frac{y}{b}=\frac{z-\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{c}{2}}{\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{a}{2}}. \qquad (3)$$

Astfel încât, planul trecând prin punctul P (x_0, y_0, z_0) perpendicular la generatoarele G_λ este:

$$\frac{a}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\left(X-x_0\right)-b\left(Y-y_0\right)+\frac{c}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\left(Z-z_0\right)=0. \qquad (4)$$

Pentru a găsi învelitoarea acestui plan depinzând de un parametru λ, se elimină λ între ecuația (4) și derivata în raport cu λ a primului său membru, egalată cu 0:

$$\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)\left(X-x_0\right)+\frac{c}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\left(Z-z_0\right)=0. \qquad (5)$$

Ecuațiile (4) și (5) se mai scriu:

$$\begin{gathered} a(\lambda^2-1)(X-x_0)-2b\lambda(Y-y_0)+c(\lambda^2+1)(Z-z_0)=0 \\ a(\lambda^2+1)(X-x_0)+c(\lambda^2-1)(Z-z_0)=0. \end{gathered} \qquad (6)$$

Din a doua rezultă:

$$\lambda^2=-\frac{a(X-x_0)-c(Z-z_0)}{a(X-x_0)+c(Z-z_0)} \qquad (7)$$

atunci prima ecuație din (6) se scrie succesiv:

$$a\frac{-2a(X-x_0)^2}{a(X-x_0)+c(Z-z_0)}+c\frac{2c(Z-z_0)^2}{a(X-x_0)+c(Z-z_0)}=2b\lambda(Y-y_0)$$

$$\left[\frac{-a^2(X-x_0)^2+c^2(Z-z_0)^2}{a(X-x_0)+c(Z-z_0)}\right]^2$$

$$=-b^2\frac{a(X-x_0)-c(Z-z_0)}{a(X-x_0)+c(Z-z_0)}(Y-y_0)^2.$$

De unde în fine:

$$[a^2(X-x_0)^2-c^2(Z-z_0)^2]^2+b^2[a^2(X-x_0)^2-c(Z-z_0)^2](Y-y_0)^2=0 \qquad (8)$$

și deci înfășurătoarea căutată este un con de gradul IV, cu vârful în punctul P.

PROBLEMA 5242. *Să se afle cel mai mic bicub terminat cu două sau trei cifre identice.*

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţie dată de D-l VIRGIL ECKSTEIN.

Pentru rezolvare vom ţine seamă de terminaţiunile cuburilor perfecte şi ale rădăcinilor lor, date în articolul cu acelaşi titlu din G. M., Vol. XLI, pag. 332, de către propunătorul problemei.

Calculul se conduce astfel: pentru un bicub N^9 terminat cu două sau trei cifre identice găsim în cele două tablouri din articol, forma radăcinii sale cubice, respectiv a lui N^3. Ţinând apoi seama de terminaţia lui N^3, găsim analog din tablouri, forma rădăcinii sale cubice, respectiv a lui N, ceea ce rezolvă problema.

1°. Bicuburi terminate cu două cifre identice.

Terminaţiunile pot fi: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 sau 11, 22, 33, 44, — 45, — 34, — 23, — 12, — 01. Din acestea convin: 11, 33, 44, — 23, — 12. — 01. Trecem calculele în tablou:

zu	N^3	N	min. N	min. min. N	$N^9_{min.}$
+ 11	$100n - 29$	$100m - 9$	91		
+ 33	$100n - 23$	$100m - 47$	53		
+ 44	$50n + 14$				
	$100n_1 + 14$	—			
	$100n_2 - 36$	$50m + 4$	4	4	262144
— 23	$100n - 47$	$100m + 47$	47		
— 12	$50n - 08$				
	$100n_1 - 08$	$50m - 2$	48		
	$100n_2 + 42$	—			
— 01	$100n - 01$	$100m - 1$	99		

Dacă terminaţia lui N^3 nu era de forma $100n + zu$, a fost transformată în această formă.

2°. Bicuburi terminate cu trei cifre identice.
Terminaţiunile pot fi:

111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999

sau

111, 222, 333, 444, —445, — 334, —223, —112, —001.

Din acestea convin numai: 111, 333, — 223, —112, —001.
Trecem calculele în tabloul următor:

szu	N^3	N	min. N	min. min. N
+ 111	$100n + 471$	$1000n + 391$	391	
+ 333	$1000n + 477$	$1000n - 147$	853	
— 223	$1000n - 247$	$1000n + 337$	337	
— 112	$250n - 058$			
	$1000n_1 + 192$ ↓	$250u + 98$	98	98
	$1000n_2 + 442$ ↓	—		
	$1000n_3 - 308$ ↓	—		
— 001	$1000n - 001$	$1000n - 001$	999	

$98^9 = 833727762130149888.$

Se poate calcula uşor desvoltând pe $(100 - 2)^9$.

Observare: Problema a fost interpretată în diferite feluri de corespondenţi şi anume:

1°. D-nii GH. BOGDAN, P. P. DRĂGHICESCU şi M. F. VĂDUVA au căutat cel mai mic patrat al cărui cub se termină cu 2 sau 3 cifre identice, găsind soluţie numai în primul caz, anume $8^6 = 262144$.

2°. D-ra LYDIA M. TUDORAN a căutat cel mai mic număr pentru care dublul cubului se termină cu 2 sau 3 cifre identice, găsind soluţiile 5488 şi 8821888.

G. G. C.

PROBLEMA 5293. *In triunghiul* ABC, γ_i, γ_i', ω_i, η_i $(i=1,2,3)$ *sunt respectiv distanțele dela punctul lui* GERGONNE, *asociatele acestuia, centrul cercului circumscris triunghiului antiortic, punctul lui* NAGEL, *la laturile lui. Să se arate că*

$$\Sigma\frac{1}{\gamma_i}=\frac{1}{r}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 \quad ; \quad \Sigma\frac{1}{\gamma_i'}=\frac{2R+r}{r^2}$$

$$\Sigma\frac{1}{\gamma_i'}-\Sigma\frac{1}{\eta_i}=\frac{2}{r} \quad ; \quad \Sigma\omega_i=r^2\Sigma\frac{1}{\eta_i}$$

R, *r, p fiind notațiile uzuale.*

M. AL. VASILESCU-STĂBU.

Soluție dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iași).

Fie Γ punctul lui GERGONNE, Γ_a,... asociatele acestuia, iar D, E, F punctele de contact ale cercului înscris pe laturile triunghiului ABC.

După teorema lui VAN AUBEL avem

$$\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma D}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}+\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=\frac{p-a}{p-c}+\frac{p-a}{p-b}=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

Deci

$$\frac{\overline{\Gamma D}}{\overline{DA}}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc-(p-a)^2}$$

iar

$$\frac{\gamma_1}{ha}=\frac{\overline{\Gamma D}}{\overline{DA}}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc-(p-a)^2}$$

adică

$$\gamma_1=\frac{2S(p-b)(p-c)}{abc-a(p-a)^2}.$$

Deci

$$\Sigma\frac{1}{\gamma_i}=\Sigma\frac{abc-a(p-a)^2}{2S(p-b)(p-c)}=\frac{abc\,\Sigma(p-a)-\Sigma a(p-a)^3}{2S(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{pabc-p^3\Sigma a+3p^2\Sigma a^2-3p\Sigma a^3+\Sigma a^4}{2S(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dar $abc = 4p\,Rr$

$$\Sigma a^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \text{ *)}$$

$$\Sigma a^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) =$$

$$8p^3 - 3(2p-a)(2p-b)(2p-c) =$$

$$8p^3 - 3[2p(ab+bc+ca) - abc]\text{*)} =$$

$$8p^3 - 6p(p^2 + 4Rr + r^2) + 12p\,Rr$$

$$\Sigma a^3 = 2p^3 - 12p\,Rr - 6pr^2 \quad **)$$

$$\Sigma a^4 = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(ab+bc+ca)^2 + 4abc(a+b+c) =$$

$$= (2p^2 - 8Rr - 2r^2)^2 - 2(p^2 + 4Rr + r^2)^2 + 32p^2\,Rr$$

$$\Sigma a^4 = 2p^4 + 32R^2 r^2 + 2r^4 - 16p^2\,Rr - 12p^2 r^2 + 16Rr^3. \quad **)$$

Deci

$$pabc - p^3\Sigma a + 3p^2\Sigma a^2 - 3p\Sigma a^3 + \Sigma a^4 = 2r^2(4R+r)^2$$

iar $$2S(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{2S^3}{p} = 2p^2 r^3.$$

Deci

$$\Sigma \frac{1}{\gamma_i} = \frac{1}{r}\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2. \tag{1}$$

Notând D_a contactul cercului exînscris în unghiul A, pe latura BC, avem analog

$$\frac{\overline{\Gamma_a A}}{\overline{\Gamma_a D_a}} = \frac{\overline{E_a A}}{\overline{E_a C}} + \frac{\overline{F_a A}}{\overline{F_a B}} = \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} = \frac{ap}{(p-b)(p-c)}$$

de unde

$$\frac{\overline{\Gamma_a D_a}}{\overline{D_a A}} = \frac{(p-b)(p-c)}{ap - (p-b)(p-c)} = \frac{\gamma_1}{h_a}$$

deci $$\gamma_1' = \frac{2S(p-b)(p-c)}{a^2 p - a(p-b)(p-c)}$$

şi $$\Sigma \frac{1}{\gamma_i'} = \frac{p^2\Sigma a^2 - p\Sigma a^3 - 2p(p-a)(p-b)(p-c)}{2S(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Sigma \frac{1}{\gamma_i'} = \frac{2R+r}{r^2}. \tag{2}$$

---

*) *Culegere de Probleme de Trigonometrie*, partea a II-a, pag. 70.

Fie N punctul lui NAGEL iar D_a, E_b, F_c picioarele cevienelor lui. Avem

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{ND_a}} = \frac{\overline{E_b A}}{\overline{E_b C}} + \frac{\overline{F_c A}}{\overline{F_c B}} = \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-b}{p-a} = \frac{a}{p-a}.$$

Deci

$$\frac{n_1}{h_a} = \frac{\overline{ND_a}}{\overline{AD_a}} = \frac{p-a}{p}$$

şi

$$\Sigma \frac{1}{n_i} = \Sigma \frac{ap}{2S(p-a)} = \frac{p^3 \Sigma a - 2p^2 \Sigma ab + 3abcp}{2p^2 r^3}$$

$$\Sigma \frac{1}{n_i} = \frac{2R-r}{r^2}. \tag{3}$$

Dacă I este centrul cercului înscris, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC iar O' centrul cercului circumscris triunghiului antiortic se ştie că O este mijlocul segmentului O'I.

Deci $R\cos A$ fiind distanţa lui O la latura BC, avem

$$2R\cos A = r + \omega_1.$$

Deci

$$\Sigma \omega_i = 2R \Sigma \cos A - 3r = 2R \cdot \frac{R+r}{R} - 3R$$

$$\Sigma \omega_i = 2R - r \tag{4}$$

Relaţiile (1), (2), (3), (4) verifică enunţul.

Observări. 1. In soluţia autorului, elementele problemei sunt exprimate cu ajutorul razelor cercurilor înscris şi exînscrise sub forma

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2r} \frac{a^2}{r_a^2} + \frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{r_1'} = \frac{a^2}{2r^2 r_a} - \frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{n_1} = \frac{1}{2Sr} \cdot ar_a$$

şi după relaţiile cunoscute *)

$$\Sigma \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}; \quad \Sigma \frac{a^2}{r_a^2} = \Sigma \frac{(r_b + r_c)^2}{p^2} = \frac{2}{p^2}\left[\Sigma r_a^2 + \Sigma r_b r_c\right] =$$

$$= \frac{2}{p^2}\left[(4R+r)^2 - p^2\right]; \quad \Sigma ar_a = 2p(2R-r)$$

$$\Sigma \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r)$$

obţinem relaţiile din enunţ.

*) *Culegere de Probleme de Trigonometrie*, II, pag. 10.

2. D-l P. DRĂGHICESCU în soluţia sa arată că dacă δ_1 este distanţa la BC a conjugatului lui Γ pe segmentul AD, avem şi

$$\Sigma \frac{1}{\gamma_i} - \Sigma \frac{1}{\delta_i} = \frac{1}{r_i}.$$

Menţionăm pentru aceasta şi identitatea

$$\Sigma a(p-a)[(p^2-a^2)-bc] = 2r^2(4R+r)^2 - 4p^2r^2.$$

N. M.

PROBLEMA 5640. *Fie* $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$ *trei vectori concurenţi; dacă notăm prin* M_2M_3 *mărimea vectorului* $\overline{M_2M_3}$ *să se arate că*

$$\varphi = \text{ung}(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = -i \log \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}} : \frac{M_1M_2}{M_1M_3}.$$

Dacă N_1, N_2, N_3 *sunt inversele punctelor* M_1, M_2, M_3 *de pol* O *şi modul arbitrar, notând cu*

$$\psi = \text{ung}(\overline{N_1N_2}, \overline{N_1N_3}), \theta = \text{ung}(\overline{OM_2}, \overline{OM_3})$$

să se deducă relaţia

$$\psi = \varphi - \theta$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-l DUMITRU G. VASILIU (lic. mil. Iaşi). Fie $\overline{M_1}$ un vector în plan:

$$\overline{M_1} = M_1 . e^{i\theta_1}$$

M_1 fiind modulul şi θ_1, unghiul făcut de vector cu o axă fixă Δ. Rezolvând invers avem

$$\theta_1 = -i \log \frac{\overline{M_1}}{M_1}.$$

Fie acum $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$ doi vectori-concurenţi în O; pentru a calcula unghiul $(\overline{M_1M_2}, \Delta)$ să ducem prin O un vector echipolent cu $\overline{M_1M_2}$; unghiul nu se schimbă şi formula va fi obţinută din precedenta înlocuind vectorul $\overline{M_1}$ prin $\overline{M_1M_2}$:

$$(\overline{M_1M_2}, \Delta) = -i \log \frac{\overline{M_1M_2}}{M_1M_2}.$$

Unghiul format de $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ va fi atunci

$$(\overline{M_1M_2}, \Delta) - (\overline{M_1M_3}, \Delta) = -i \log \frac{\overline{M_1M_2}}{M_1M_2} + i \log \frac{\overline{M_1M_3}}{M_1M_3}$$

deci

$$\varphi = (\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = -i \log \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}} : \frac{M_1M_2}{M_1M_3}.$$

*

Dacă N_1, N_2, N_3 sunt inversele punctelor M_1, M_2, M_3 de pol O, modul k, vectorul $\overline{ON_1}$ (scurt $\overline{N_1}$) se poate exprima prin

$$\overline{N_1} = \frac{k}{\overline{M_1}}$$

urmată de o simetrie, care nu schimbă unghiul; deducem

$$\overline{N_1N_2} = \overline{N_2} - \overline{N_1} = k\left(\frac{1}{\overline{M_2}} - \frac{1}{\overline{M_1}}\right) = -k\frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1} \cdot \overline{M_2}}$$

de unde luând modulele

$$N_1N_2 = k \frac{M_1M_2}{OM_1 \cdot OM_2}$$

relația ce dă distanța punctelor inverse N_1, N_2.

Atunci

$$\psi = (\overline{N_1N_2}, \overline{N_1N_3}) = -i \log \frac{\overline{N_1N_2}}{\overline{N_1N_3}} : \frac{N_1N_2}{N_1N_3} =$$

$$-i \log \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}} \cdot \frac{\overline{M_3}}{\overline{M_2}} : \frac{M_1M_2}{M_1M_3} =$$

$$-i \log \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_2}} : \frac{M_1M_2}{M_1M_3} + i \log \frac{\overline{M_3}}{\overline{M_2}} : \frac{M_3}{M_2} = \varphi - \theta.$$

Observare. 1°. Relația $\psi = \varphi - \theta$ se poate demonstra și elementar prin egalitățile succesive de unghiuri

$$N_2N_1N_3 = N_3N_1O \pm N_2N_1O = OM_3M_1 \pm OM_2M_1 =$$

$$\text{supl.}\,(M_1OM_3 + OM_1M_3) \pm \text{supl.}\,(M_1OM_2 + OM_1M_2) =$$

$$(M_1OM_2 + OM_1M_2) \pm (M_1OM_3 + OM_1M_3) =$$

$$(OM_1M_2 \pm OM_1M_3) \pm (M_1OM_3 \pm M_1OM_2) = M_2M_1M_3 \pm M_2OM_3.$$

2°. Păstrând M_2, M_3 deci N_2, N_3 şi θ fixe rezultă că dacă M_1 descrie un cerc ce trece prin M_2, M_3 deci $\varphi = \text{const.}$, şi $\psi = \text{const.}$ deci N_1 descrie un cerc ce trece prin N_2, N_3. Deci inversul unui cerc este un cerc. Dacă $\varphi = \theta$ adică M_1 descrie cercul OM_2M_3 avem $\psi = 0$ deci N_1 descrie dreapta N_2N_3 deci inversul unui cerc ce trece prin pol este o dreaptă. Dacă $\varphi = 0$ adică M_1 descrie dreapta M_2M_3 avem $\psi = |\theta|$ deci N_1 descrie cercul ON_2N_3 deci inversa unei drepte este un cerc ce trece prin pol. Relaţia $\psi = \varphi - \theta$ strânge deci toate cazurile, care capătă o demonstraţie unitară. Acest lucru l-am arătat şi în broşura „Transformarea prin inversiune".

3°. Observaţia pentru $\varphi = 0$ a făcut-o şi D-l D. G. VASILIU.

PROBLEMA 5657. *Dacă* b, a, c *sunt laturile unui triunghiu automedian, să se stabilească relaţia :*

$$\frac{(a+b)(c-a)}{(a-b)(c+a)} \cdot \frac{k_1(a+b)+k_2(c-a)}{k_1(c+a)+k_2(a-b)} = \frac{k_3(a+b)^3+k_4(c-a)^3}{k_3(c+a)^3+k_4(c+a)^3}$$

k_1, k_2, k_3, k_4 *fiind numere oarecare.*

IONEL I. STAMATE.

Soluţie. Triunghiul fiind automedian, patratele laturilor sale sunt în progresie aritmetică, adică

$$2a^2 = b^2 + c^2.$$

Această relaţie se mai poate scrie

$$a^2 - b^2 = c^2 - a^2$$

sau

$$\frac{a+b}{c-a} = \frac{c+a}{a-b}. \tag{1}$$

Pentru uşurinţa scrisului, notăm

$$A = a+b \quad , \quad B = c-a \quad , \quad C = c+a \quad , \quad D = a-b.$$

Ţinând seama de relaţia (1) obţinem

$$\frac{A^2B}{C^2D} = \frac{AB^2}{CD^2} = \frac{A^3}{C^3} = \frac{B^3}{D^3}.$$

Amplificând fiecare raport cu k_1, k_2, k_3, k_4 se deduce

$$\frac{ABk_1A}{CDk_1C} = \frac{ABk_2B}{CDk_2D} = \frac{k_3A}{k_3C} = \frac{k_4B}{k_4D}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor, găsim

$$\frac{AB}{CD}\cdot\frac{k_1A+k_2B}{k_1C+k_2D}=\frac{k_3A^3+k_4B^3}{k_3C^3+k_4D^3}.$$

Astfel relaţia dată este stabilită.

Au rezolvat astfel problema D-nii: Sublt. MIRCEA A. VASILESCU-STABU (Bucureşti), ION GR. ENĂCHESCU (Bacalaureat, Brăila), MAIOR EUGEN A. IACOB, Sublt. C-TIN PANTELIMON (Artileria antiaeriană Ploeşti), Sublt. aviator MIREL STOENESCU (Bucureşti), MARIN GH. POPESCU (Lic. „I. C. Brătianu", Piteşti), MARCEL D. COTARIU (Brăila), CLAUDIU SENI (Bacalaureat, Bucureşti), ARMAND N. PITIŞ (elev particular, Mizil), VASILE PĂLĂCEANU, GHEORGHE OPREA, ELIZEU PETRESCU, NICOLAE RĂDOI, TUDOR P. PÂNTEA (toţi bacalaureaţi ai Liceului Militar „Mihai Viteazul" din Timişoara).

Notă. D-l Sublt. MIRCEA VASILESCU-STABU a dedus analog ca mai sus relaţia

$$\frac{(a+b)^p(c-a)^p}{(a-b)^p(c+a)^p}\cdot\frac{k_1(a+b)^p\pm k_2(c-a)^p}{k_1(c+a)^p\pm k_2(a-b)^p}=\frac{k_3(a+b)^{3p}\pm k_4(c-a)^{3p}}{k_3(c+a)^{3p}\pm k_4(a-b)^{3p}}$$

care pentru $p=1$ şi semnul plus, dă problema 5657.

I. I. S.

PROBLEMA 5702. *Se povesteşte despre un învăţat că începând o problemă pe spatele unei trăsuri ce staţiona, a continuat-o şi după plecarea trăsurii alergând în urma ei.*

Asimilând spatele trăsurii unui plan vertical şi presupunând că acest învăţat a trasat cu creta cu iuţeala v *în raport cu trăsură, un cerc de raza* v *un diametru orizontal şi un diametru vertical în timp ce trăsura mergea cu iuţeala constantă* v_0 *pe un drum rectiliniu orizontal, să se determine curbele trasate de vârful cretei faţă de un observator ce privea scena nemişcat. Să se studieze problema şi în cazul când trăsura ar fi avut o mişcare rectilinie uniform accelerată cunoscută.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie de D-nii: C. D. EFTIMIE (Politechnica Bucureşti) şi C. BAKONYI (Politechnica Timişoara).

In spaţiu vom considera trei axe de coordonate, centrul sistemului de axe O fiind în centrul cercului în momentul plecării trăsurii, axa Ox dreapta orizontală descrisă de centrul acestui cerc, axa Oy orizontala perpendiculară pe Ox în O iar axa Oz dreapta perpendiculară în O pe Ox şi Oy.

Oricare punct al cercului își are coordonatele:

$$x = v_0 t$$
$$y = r \cos\alpha$$
$$z = r \sin\alpha$$

unde t este timpul iar: $\alpha = \omega t = \frac{v}{r} . t.$

Curba rezultată prin trasarea cercului este:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = r \cos \frac{v}{r} . t \\ z = r \sin \frac{v}{r} . t \end{cases}$$

Este ecuația *unei elice circulare, pasul elicei fiind:*

$$h = 2\pi \frac{v_0 r}{v}.$$

Inclinarea θ a spirelor: $tg\,\theta = \frac{v_0}{v}.$

Prin trasarea diametrului orizontal, avem curba (trasare dela stânga spre dreapta):

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = vt - r \\ z = 0. \end{cases}$$

Eliminăm pe t

$$\begin{cases} y = \frac{vx}{v_0} - r \\ z = 0. \end{cases}$$

Ecuația unei *drepte* din planul xOy.

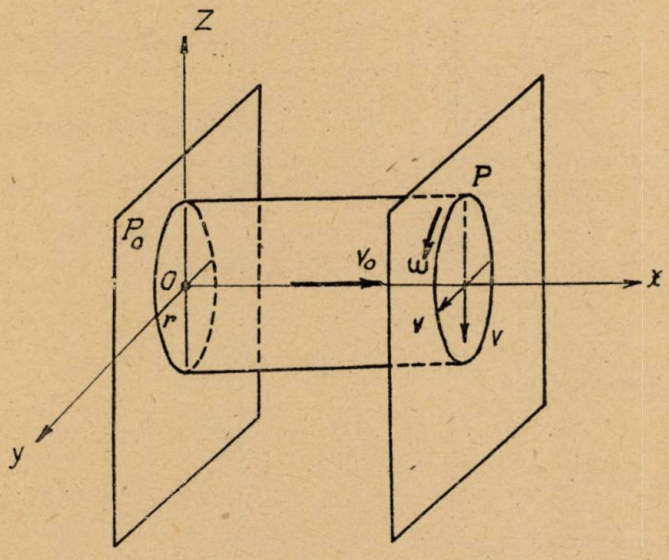
Pentru diametrul vertical (trasare de sus în jos):

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = -vt + r. \end{cases}$$

Eliminăm pe t

$$\begin{cases} z = -\dfrac{v}{v_0}x + r \\ y = 0. \end{cases}$$

Ecuația unei *drepte* din planul xOz.



Când trăsura are o accelerație constantă W valorile lui y și z nu se schimbă, în schimb valoarea lui x este pretutindeni $\frac{W}{2} \cdot t^2$.

Pentru cerc:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W}{2}t^2 \\ y = r\cos\dfrac{vt}{r} \\ z = r\sin\dfrac{vt}{r}. \end{cases}$$

Ecuația unei *curbe strâmbe* — asemănătoare unei elice circulare fără ca pasul să rămână același.

Pentru diametrul orizontal

$$\begin{cases} x = \dfrac{W}{2} t^2 \\ y = vt - r \\ z = 0. \end{cases}$$

Eliminăm pe t

$$\begin{cases} x = \dfrac{W}{2v^2} (y + r)^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Ecuaţia unei *parabole* din planul xOz.

Pentru diagonala verticală:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W}{2} t^2 \\ y = 0 \\ z = -vt + r \end{cases}$$

Eliminăm pe t

$$\begin{cases} x = \dfrac{W}{2v^2} (z - r)^2 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ecuaţia unei *parabole* din planul xOz.

AL. ST.

PROBLEMA 5729. *Fie* $N = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots L^{\lambda}$. *Ori cum am descompune numerele* $n, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *în acelaşi număr de termeni*

$$\sum_1^k n_i = n \; ; \; \sum_1^k \alpha_i = \alpha \; ; \; \sum_1^k \beta_i = \beta ; \ldots ; \sum_1^k \lambda_i = \lambda$$

produsele

$$\prod_1^k \varphi \left[A^{\alpha \pm \alpha_i} . B^{\beta \pm \beta_i} \ldots L^{\lambda \pm \lambda_i} \right]$$

şi

$$\prod_1^k \varphi \left[A^{\alpha (1 \pm n_i) \pm \alpha_i} . B^{\beta (1 \pm n_i) \pm \beta_i} \ldots L^{\lambda (1 \pm n_i) \pm \lambda_i} \right]$$

unde $\varphi(u)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* u *şi mai mici ca el, sunt constante.*

P. P. DRĂGHICESCU.

Soluţie dată de D-l GEORGE GH. DONŢU (Iaşi).

Să notăm cu

$$M_0 = A^{\alpha \pm \alpha_i} . B^{\beta \pm \beta_i} \dots L^{\lambda \pm \lambda_i}$$

şi

$$M_n = A^{\alpha(1 \pm n_i) \pm \alpha_i} . B^{\beta(1 \pm n_i) \pm \beta_i} \dots L^{\lambda(1 \pm n_i) \pm \lambda_i} .$$

Se observă că M_0 se obţine din M_n făcând, în acesta din urmă, $n = 0$. E deajuns deci să-l calculăm numai pe M_n. Avem succesiv

$$\prod_1^k \varphi(M_n) = \prod_1^k \varphi [A^{\alpha(1 \pm n_i) \pm \alpha_i} . B^{\beta(1 \pm n_i) \pm \beta_i} \dots L^{\lambda(1 \pm n_i) \pm \lambda_i}] =$$

$$= \prod_1^k [A^{\alpha(1 \pm n_i) \pm \alpha_i - 1} . B^{\beta(1 \pm n_i) \pm \beta_i - 1} \dots L^{\lambda(1 \pm n_i) \pm \lambda_i - 1} . (A-1)(B-1)\dots(L-1)] =$$

$$= A^{\alpha(k \pm n) \pm \alpha - k} . B^{\beta(k \pm n) \pm \beta - n} \dots L^{\lambda(k \pm n) \pm \lambda - k} [(A-1)(B-1)\dots(L-1)]^k =$$

$$= \frac{[A^{\alpha} . B^{\beta} \dots L^{\lambda}]^{k \pm (n+1)}}{(A . B \dots L)^k} \cdot [(A-1)(B-1)\dots(L-1)]^k =$$

$$= N^{\pm(n+1)} . N^k \left[\left(1 - \frac{1}{A}\right)\left(1 - \frac{1}{B}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{L}\right)\right]^k = N^{\pm(n+1)} [\varphi(N)]^k .$$

Aşa dar

$$\prod_1^k \varphi(M_n) = N^{\pm(n+1)} [\varphi(N)]^k \qquad (1)$$

Făcând în (1) pe $n = 0$, obţinem

$$\prod_1^k \varphi(M_0) = N^{\pm 1} [\varphi(N)]^k \qquad (2)$$

Intr'adevăr formulele (1) şi (2) ne spun că produsele din enunţ sunt constante.

Observaţie. Problema 5729 mi-a sugerat ideea de a calcula şi următoarele produse

$$\prod_1^k \sigma(M_0) \quad \text{şi} \quad \prod_1^k \sigma(M_n)$$

în aceleaşi condiţii ca mai sus. Şi aici aceeaşi observaţie; primul produs se obţine din al doilea făcând $n = 0$.

Ţinând seama de identitatea

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} x \varphi(x)$$

avem

$$\prod_1^k \sigma(M_n) = \prod_1^k \frac{1}{2} M_n \varphi(M_n) = \frac{1}{2^k} \cdot \prod_1^k M_n \cdot \prod_1^k \varphi(M_n) \tag{3}$$

Să calculăm produsul $\prod_1^k M_n$. Avem succesiv

$$\prod_1^k M_n = \prod_1^k [A^{\alpha(1\pm n_i)\pm\alpha_i} . B^{\beta(1\pm n_i)\pm\beta_i} \ldots L^{\lambda(1\pm n_i)\pm\lambda_i}] =$$

$$= A^{\alpha(k\pm n)\pm\alpha} . B^{\beta(k\pm n)\pm\beta} \ldots L^{\lambda(k\pm n)\pm\lambda} = (A^{\alpha} . B^{\beta} \ldots L^{\lambda})^{k\pm(n+1)} = N^{k\pm(n+1)}.$$

Prin urmare

$$\prod_1^k \sigma(M_n) = N^{k\pm(n+1)} \tag{4}$$

Ţinând seamă de relaţiile (1) şi (4), relaţia (3) devine

$$\prod_1^k \sigma M_n) = \frac{1}{2^k} \cdot N^{k\pm 2(n+1)} [\varphi(N)]^k = N^{\pm 2(n+1)} [\sigma(N)]^k.$$

Aşa dar

$$\prod_1^k \sigma(M_n) = N^{\pm 2(n+1)} [\sigma(N)]^k \tag{5}$$

Făcând $n = 0$ căpătăm

$$\prod_1^k \sigma(M_0) = N^{\pm 2} [\sigma(N)]^k \tag{6}$$

Au mai trimis soluţii bune D-nii: P. F. IONESCU şi SLT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

PROBLEMA 5786. *Fie* M *un punct în planul unei conice de centru* O, *cu un focar în* F *şi* P *intersecţia diametrului* OM *cu perpendiculara din* F *pe polara lui* M. *Să se arate că, dacă* M *este arbitrar în plan,* P *descrie directoarea corespunzătoare focarului* F. *Ce devine proprietatea în cazul parabolei?*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție geometrică dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Problema revine la a demonstra că polara punctului P trece prin F. Această dreaptă unește polii diametrului din M și al dreptei FP. Primul pol este punctul dela infinit al polarei lui M, perpendiculară pe FP. Pentru a găsi polul dreptei FP, fie P_1, P_2 intersecțiile ei cu conica; tangentele în P_1, P_2 se taie în Q; dar după teorema PONCELET unghiurile P_1FQ, P_2FQ sunt egale, deci drepte; rezultă că polul Q este situat pe perpendiculara în F pe FP, de unde rezultă proprietatea cerută.

Demonstrația este făcută și pentru parabolă, observând că diametrul din M este paralel cu axa.

Soluție analitică dată de D-nii: CONSTANTIN PANTELIMON (Sublocotenent, Artileria antiaeriană, Ploești), MARCEL D. COTARIU (Brăila), RADU P. VOINEA (student, Politehnica București), EUGEN N. WEGENER (București).

Fie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

ecuația conicei și $M(\alpha, \beta)$. Diametrul lui M este

$$\frac{y}{x}=\frac{\beta}{\alpha}. \tag{1}$$

Polara lui M

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{a^2-c^2}=1$$

are panta

$$m=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2}$$

deci perpendiculara dusă din $F(c, 0)$ are ecuația

$$y=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{a^2}{a^2-c^2}(x-c). \tag{2}$$

Deși sunt doi parametri, ei intră în (1) și (2) sub aceeași combinație $\beta:\alpha$ deci îi putem elimina. Obținem pe de o parte $y=0$ care convine numai când $\beta=0$ deci M pe Ox, apoi

$$x=\frac{a^2}{c}$$

deci directoarea.

In cazul parabolei $y^2 = 2px$ perpendiculara din focar pe polară are ecuația

$$y = -\frac{\beta}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

dar $\beta = y$ (paralela din M la axă); deci $x = -\frac{1}{2}p$.

Observație. 1. D-l MIREL D. STOENESCU (Slt. av.) dă o altă soluție geometrică.

2. Explicația faptului că M poate fi oriunde în plan constă în însușirea că toate punctele diametrului OM au polarele paralele [1]). Să luăm atunci pe M pe conică. *Fie* M *un punct pe o conică. Perpendiculara dintr'un focar* F *pe tangenta în* M *taie diametrul lui* M *în* P *care descrie directoarea focarului* F, *când* M *descrie conica* (proprietate cunoscută [2]). Este o generalizare a unei proprietăți clasice a parabolei.

PROBLEMA 5794. *Fie* M *un punct în planul unei elipse de centru* O *cu un focar* F *și* P *intersecția diametrului* OM *cu dreapta dusă prin* F *antiparalelă polarei lui* M, *în raport cu axa mare a elipsei. Să se arate că, dacă* M *este arbitrar în plan,* P *descrie o iperbolă de axă transversă* OF *și cu axa netransversă de lungime* $\frac{bc}{a}$.

Să se studieze cazul când plecăm dela celelalte conice.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție analitică dată de D-nii: CONSTANTIN PANTELIMON (Sublocot. Art. ant. Ploești), P. P. DRĂGHICESCU, NICOLAE V. IONESCU (bacalaureat), EUGEN N. WEGENER (București).

Fie

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ecuația unei conice cu centrul în O (0, 0) și cu focarul F (c, 0) și M (α, β).

---

1) Se vede și din forma lui m care depinde de $\frac{\beta}{\alpha}$ numai.

2) De ex. I. DUMITRIU, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, problema 44 pag. 84.

Diametrul lui M are ecuaţia

$$(1) \qquad \frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}$$

şi polara lui M are panta

$$m = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

deci ecuaţia dreptei duse prin F în condiţiile enunţului este

$$(2) \qquad y = \frac{\alpha}{\beta} \frac{a^2 - c^2}{a^2} (x - c).$$

Eliminând pe α, β între (1) şi (2), — eliminare posibilă căci parametrii intervin numai în combinaţia $\alpha : \beta$ — obţinem

$$a^2y^2 = (a^2 - c^2)\, x\, (x - c)$$

sau

$$(II) \qquad \frac{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2}{\frac{c}{4}} - \frac{y^2}{\frac{c^2\,(a^2 - c^2)}{4a^2}} = 1$$

deci o conică de centru $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ şi semiaxe $\frac{c}{2}$, $\frac{c\sqrt{a^2 - c^2}}{2a}$.

Dacă $a^2 - c^2 > 0$, (I) reprezintă o elipsă şi (II) o iperbolă şi invers.

In cazul parabolei $y^2 = 2px$ ecuaţiile (1), (2) devin

$$(1') \qquad y = \beta; \qquad (2') \quad y = -\frac{p}{\beta}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

deci locul geometric

$$y^2 = -p\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

o parabolă de vârf F $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, axă Ox şi parametru $-\frac{1}{2}p$.

Observaţie. Soluţie geometrică. Toate punctele de pe diametrul OM au polarele paralele. Vom simplifica atunci enunţul la următorul: *Fie* M *un punct variabil al unei conice; dreapta dusă printr'un focar* F *antiparalelă tangentei în* M, *în raport cu axa conicei ce trece prin* F *taie diametrul punctului* M *în* P *al cărui loc geometric se cere.* Observăm că razele ce trec prin O — centrul conicei, presupus că există — şi F sunt în corespondenţă omografică deci P descrie o conică ce trece prin O şi F, simetrică faţă de OF deci cu centrul în mijlocul lui OF. Natura conicei ne va fi dată de poziţia asimptotelor deci de dreptele ce trec prin F, în condiţiile enunţului paralele cu OM. Pentru a găsi aceste puncte M, construim dreptunghiul de axe a, b şi diagonalele lui dau diametrii căutaţi. Dacă conica iniţială este o elipsă, punctele M există deci şi asimptotele şi conica finală este o iperbolă şi invers. Fie α, β axele conicei loc geometric; $\alpha = c$. Direcţia asimptotelor este dată fie de $b : a$ fie de $\beta : \alpha$; deci $\beta = \frac{bc}{a}$.

Este uşor de refăcut raţionamentul în cazul parabolei.

PROBLEMA 5862. *Să se arate că dacă a_i şi b_i reprezintă numere întregi şi pozitive, avem:*

$$E\left[\prod_1^n \left(\frac{a_i}{b_i}\right)\right] \geqslant \prod_1^n E\left(\frac{a_i}{b_i}\right).$$

(Enunţ rectificat).

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: GH. A. GRIGORE (elev particular clasa a VIII-a) şi G. G. VRÂNCEANU (Liceul Militar, Timişoara).

Ştim că:

$$E\left(\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}\right) = E\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot E\left(\frac{a_2}{b_2}\right) + E\left[\frac{r_{a_1}}{b_1} E\left(\frac{a_2}{b_2}\right) + \frac{r_{a_2}}{b_2} E\left(\frac{a_1}{b_1}\right)\right].$$

Apoi cum termenul al II-lea din membrul II este totdeauna pozitiv, avem:

$$E\left(\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}\right) \geqslant E\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot E\left(\frac{a_2}{b_2}\right).$$

Extinzând raţionamentul la n fracţii, obţinem condiţia din enunţ.

Problema 5862 s'a propus, din eroare, cu sensul $\leqslant$, în loc de $\geqslant$, cum trebuia să fie.

PROBLEMA 5885. *Se notează cu* x *numărul de ordine al literelor* a, b, ... z *din alfabet. Să se descifreze textul*

$$\overline{58}.76.1.64.19.76.\overline{40}.76.19.64.40.76.19.52.70.76$$

$$76.25.64 \quad 31.76.19.25.16.1.64.70.52 \quad 22.52 \quad 34.31.19$$

$$67.64 \quad 76.37.52$$

în care numerele separate prin puncte, sunt valorile pe care le ia y *din expresia*

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \arccos [1 - 2\ (79-x)^2]$$

când i se dau lui x *diferite valori.*

Punctele dintre numere separă liniile, iar numerele cu linie deasupra înseamnă litere mari.

AD. I. POPESCU.

Pentru rezolvarea problemei trebue să găsim relaţia algebrică care leagă pe x cu y. Pentru aceasta observăm că

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \operatorname{arc\,sin} y \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} \arccos [1 - 2\ (79-x)^2] = \operatorname{arc\,sin}\ (79-x) \qquad (2)$$

Să demonstrăm egalităţile (1) şi (2).

Pentru (1) punem

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = u \quad \text{şi} \quad \operatorname{arc\,sin} y = v$$

$$\therefore \quad \frac{1-\sqrt{1-y^3}}{y} = \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad \text{şi} \quad y = \sin v$$

$$\therefore \quad \frac{1-\cos v}{\sin v} = \frac{2\sin^2 \frac{v}{2}}{2\sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2}} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$\therefore \quad u = v$$

adică egalitatea (1).

La fel pentru (2), în care înlocuim pe $79 - x$ prin a,

$$\arccos [1 - 2a^2] = u \quad \text{şi} \quad \arcsin a = v$$

$$\because \qquad 1 - 2a^2 = \cos u \qquad a = \sin v$$

$$\therefore \qquad 1 - \sin 2^2 v = \cos u \quad ; \quad 1 - \cos u = 2\sin^2 v = 2\sin^2 \frac{u}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{u}{2} = v$$

adică tocmai egalitatea (2).

Ţinând seamă de (1) şi (2), condiţia din enunţ devine

$$\arcsin y = \arcsin (79 - 3x)$$

$$\therefore \qquad y = 79 - 3x \qquad (3)$$

Inlocuim în (3) pe y succesiv prin numerele date în text şi obţinem următorul tabel care dă valorile corespunzătoare ale lui x:

$y=$	58,	76,	1,	64,	19,	40,	52,	70,	25,	31,	16,	22,	34,	67,	37
$x=$	7,	1,	26,	5,	20,	13,	9,	3,	18,	16,	21,	19,	15,	4,	14

Scriind literele alfabetului în ordinea naturală şi numerotându-le, găsim că pentru x din linia a doua a tabelului precedent avem textul:

Gazeta Matematică are patruzeci şi opt de ani.

A rezolvat bine problema D-l MIHAI MANOLIU (Lic. „Codreanu", Bârlad).

Un corespondent din Timişoara, a dat rezultatul exact, fără a dovedi cum l-a... ghicit.

Problema a fost primită dela propunătorul ei la 5 Noembrie 1942 când *Gazeta Matematică* se află în al 48-lea an fără a-i fi împlinit, şi a fost propusă la 15 Decembrie 1943 când *Gazeta Matematică* avea împliniţi 48 de ani. Astăzi *Gazeta Matematică* a trecut de 49 de ani. Nu i-am publicat soluţia înainte de a fi împlinit 49 de ani pentrucă nu am primit soluţie înainte de acel termen.

PROBLEMA 5899. *Să se demonstreze că într'un triunghiu auto-median, dreptele cari unesc punctul lui* LEMOINE *cu centrele cercurilor tritangente ale triunghiului, formează un fascicol armonic.*

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Se ştie că razele unui fascicol de patru drepte determină pe o dreaptă oarecare din planul său, patru puncte al căror raport anarmonic este constant şi independent de poziţia acestei drepte.

Fie ABC un triunghiu oarecare. Considerăm intersecţia fascicolului de drepte din enunţul problemei, cu una din laturile triunghiului. Fie:

$$k\,(a^2,\ b^2,\ c^2)\ ;\quad I\,(a,\ b,\ c)\ ;\quad I_a\,(-a,\ b,\ c)\ ;\quad I_b\,(a,\ -b,\ c)$$
$$I_c\,(a,\ b,\ -c)$$

respectiv coordonatele baricentrice ale punctului lui LEMOINE şi centrelor cercurilor tritangente. Ecuaţia dreptei kI este:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Intersecţia acestei drepte cu latura BC ne dă:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{ab-b^2}{ac-c^2} = \frac{b}{c}\cdot\frac{a-b}{a-c} = k_1.$$

Aceasta este valoarea raportului în care dreapta kI, împarte segmentul BC.

Procedând în mod analog şi cu punctele I_a, I_b, I_c obţinem respectiv:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{b}{c}\cdot\frac{a+b}{a+c} = k_2\ ;\quad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{b}{c}\,\frac{a+b}{a-c} = k_3\ ;\quad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{b}{c}\,\frac{a-b}{a+c} = k_4.$$

Cunoscând valorile rapoartelor k_1, k_2, k_3, k_4 în care fiecare din cele patru puncte împarte segmentul BC, valoarea ρ a uneia din valorile raportului anarmonic al celor patru puncte, este dată de expresia:

$$\rho = \frac{k_3-k_1}{k_3-k_2} : \frac{k_4-k_1}{k_4-k_2}$$

(G. M., XLIV, pag. 700).

Inlocuind în această expresie valorile lui k, obţinute mai sus, se găseşte:

$$\rho = \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\cdot$$

Pentru ca valoarea lui ρ să fie armonică, se știe că trebue să aibă una din valorile: -1, $\frac{1}{2}$ sau 2, acestea fiind singurele valori ce le poate avea raportul armonic, permutând în toate modurile posibile patru puncte cari formează o diviziune armonică.

Pentru $\rho = -1$ avem:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} = -1 \quad \therefore \quad 2a^2 = b^2 + c^2$$

pentru $\rho = \frac{1}{2}$ avem:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad 2c^2 = a^2 + b^2$$

pentru $\rho = 2$ avem:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} = 2 \quad \therefore \quad 2b^2 = a^2 + c^2 .$$

Toate aceste relațiuni demonstrează enunțul problemei.

ȘT. S. M.

S'a primit o soluție bună dela D-l P. P. DRĂGHICESCU (student-inginer)

EXERCIȚII

3. *Să se rezolve sistemul*

$$\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} + 4 = 0 \quad , \quad \frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{1}{4} = 0.$$

E. N. WEGENER.

R. Punem

$$x = \operatorname{tg} u \quad , \quad y = \operatorname{tg} v$$

și ajungem la sistemul

$$\frac{\sin 2u}{\cos(u+v)\cos(u-v)} + 4 = 0 \quad ; \quad \cos^2 u - \sin^2 v + \frac{1}{4} = 0.$$

Observând că

$$\cos(u+v)\cos(u-v) = \cos^2 u - \sin^2 v$$

înlocuind în prima ecuație și înmulțind-o apoi cu a doua, avem

$$\sin 2u = 1 \quad \therefore \quad \operatorname{tg} u = 1$$

și deci $x = 1$, care dus în una din ecuațiile date găsim

$$y = \pm\sqrt{3}.$$

Verificăm și găsim că soluțiile sistemului sunt

$$x = 1 \quad , \quad y = \pm\sqrt{3}.$$

4. *Să se rezolve sistemul*

$$xyz - x - y - z - xy - yz - zx = -1$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} z$$

$$\arcsin \frac{x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = \frac{15^0}{2}.$$

MARCEL D. COTARIU

R. Prima ecuație dă

$$\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = 1. \qquad (1)$$

Notăm

$$x = \operatorname{tg}\alpha \ ; \ y = \operatorname{tg}\beta \ ; \ z = \operatorname{tg}\gamma$$

$$\therefore \ \operatorname{arctg} x = \alpha \ ; \ \operatorname{arctg} y = \beta \ \ \operatorname{arctg} z = \gamma.$$

Cu aceste notații (1) devine

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = 1 \quad \therefore \quad \alpha+\beta+\gamma = 45^0. \qquad (2)$$

Ecuația a doua a sistemului va fi

$$\alpha+\beta-\gamma = 0 \qquad (3)$$

iar ultima ecuație a sistemului se poate scrie

$$\frac{x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}} = \frac{\dfrac{x-y}{1+xy}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)^2}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}} =$$

$$= \sin(\alpha-\beta) = \sin\frac{15^0}{2}. \qquad (4)$$

Din (2), (3) și (4) deducem

$$\alpha = 15^0 \quad , \quad \beta = \frac{15^0}{2} \quad \text{și} \quad \gamma = \frac{45^0}{2}$$

care dau pe $x_1\, y_1\, z$.

PROBLEME PROPUSE

6021. Un număr întreg se împarte exact prin numerele dela 1 la 10, inclusiv acestea. Pentru care număr suma câturilor este cea mai mică? Aceeaşi chestiune pentru suma produselor acelor câturi luate câte două.

I. IONESCU.

6022. Să se găsească un bipatrat, de 11 cifre, format numai din cifrele 1, 2, 5, 6, 7, 8, ştiind că ultimele 6 cifre dela dreapta este un număr simetric de forma *abccba*.

A. GLODEN.

6023. Să se determine două numere întregi şi pozitive, M şi N, care diferă între elc cu 15, ştiind că între M şi N se găsesc tot atâtea numere prime cu M câte numere sunt prime cu N.

IOAN B. FLORESCU.

6024. Numărul de telefon al Societăţii *Gazeta Matematică* este astăzi 73803. Să se studieze proprietăţile aritmetice ale numărului 73803.

COMANDOR I. LINTEŞ.

6025. Să se găsească condiţiile pe care trebue să le îndeplinească numerele reale date $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pentru ca ecuaţia

$$\frac{\alpha_1}{x-a_1}+\frac{\alpha_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x-a_n}=0.$$

să aibă toate rădăcinile reale oricare ar fi numerele $a_1<a_2<\ldots<a_n$.

TIBERIU POPOVICIU.

6026. Să se arate, că sistemul format din anularea primelor k derivate, în raport cu t, ale expresiei

$$\sum_{s=0}^{k} t^s x_s - t^i$$

admite soluţia

$$x_1 = (-1)^{k-s}\, C_i^s\, C_{i-s-1}^{k-s}\, t^{i-s}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

6027. Fie cercul (O) de rază R şi $\overline{AB}$ latura poligonului regulat convex de *nouă* laturi. Să se arate, că expresia laturii $\overline{AB}$ în funcţie de raza R este rădăcina unei ecuaţii de gradul al treilea. Să se discute această ecuaţie şi să se arate cărei rădăcini corespunde latura $\overline{AB}$.

O. N. ŢINO.

6028. Să se determine polinoamele întregi în x, $P(x)$ şi $Q(x)$, care să satisfacă relaţia

$$Q^2P'' - 2P'Q'Q + (aQ^2 - QQ'' + 2Q'^2)P = 0,$$

unde a este o constantă, iar accentele indică operaţia derivării.

Caz particular, $a = 0$.

M. GHERMĂNESCU.

6029. Fie ABCDA'B'C'D' o prismă dreaptă cu baza un patrulater inscriptibil. Dacă $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, să se demonstreze relaţiile:

a) (aria ABB'A')^2 − (aria CDD'C')^2 = (aria ABB'A' . aria ADD'A' + aria BCC'B' aria CDD'C')

b) (aria ADD'A')^2 − (aria BCC'B')^2 = [aria ABB'A' . aria ADD'A' + aria BCC'B' . aria CDD'C') cosα + (aria ABB'A' . aria BCC'B' + aria ADD'A' . aria CDD'C') cosβ.

VIRGIL GHIŢESCU.

6030. Se ştie că, dacă un plan taie muchiile unui tetraedru în şase puncte, izotomicele acestor puncte faţă de fiecare muchie sunt într'un plan P' numit plan transversal reciproc al planului P.

Fiind date cinci planuri, să să arate că planurile tansversale reciproce ale fiecăruia din ele în raport cu tetraedrul format de celelalte patru planuri, sunt paralele.

Să se deducă, că dreptele lui NEWTON ale patrulaterelor complecte, formate în fiecare plan de urmele celorlalte patru planuri, sunt paralele unui aceluiaşi plan.

V. THÉBAULT.

6031. Fie SABC un tetraedru şi M un punct oarecare. Dreptele SM, AM, BM, CM înţeapă planurile opuse în S', A', B', C'. Considerăm punctele A", B", C", asociate punctelor A', B', C' în unghiurile din S ale triunghiurilor SBC, SCA, SAB.

a) Dreptele AA", BB", CC" concură într'un punct M'.

b) Punctele S', M, S, M' formează o diviziune armonică.

P. P. DRĂGHICESCU.

6032. Fie triunghiurile T_1, T_2 şi T_3 înscrise în acelaşi cerc.

a) Pe cercul circumscris comun există un punct φ, şi numai unul, ale cărui drepte SIMSON, în raport cu fiecare din triunghiurile considerate, sunt concurente.

b) Parabolele înscrise în fiecare din triunghiuri şi având focarul în φ, admit o tangentă comună Δ.

c) Δ este de asemeni tangentă comună celor trei conice înscrise în câte una din perechile de triunghiuri (T_1, T_2), (T_2, T_3), (T_3, T_1).

ŞERBAN GHEORGHIU.

6033. Pe cercul (O) se dau punctele fixe A, B şi punctul mobil M. Coarda BM întâlneşte în T tangenta în B la (O). Se cere locul geometric al proiecţiei lui T pe BM.

G-L GH. BUICLIU.

6034. Se dau două puncte fixe P, Q în spaţiu şi o transformare omografică oarecare. Să se arate, că locul geometric al punctelor coplanare cu transformatele lor şi cu punctele P, Q este o cuadrică (C) circumscrisă tetraedrului format de punctele duble ale transformării şi conţinând dreapta PQ.

Pentru toate omologiile biaxiale ale spaţiului, familia cuadricelor (C) se reduce la trei cudrice având dreapta PQ comună.

C. IONESCU-BUJOR.

6035. Să se studieze mişcarea unui punct material de masă *m* cunoscând momentele *cantităţii sale de mişcare*, în funcţie de timp, *în raport cu trei puncte date situate în planul mişcării.*

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. Din lista membrilor decedaţi, publicată în numărul precedent la pag. 22, se suprimă rândul 5, care a fost introdus dintr'o regretabilă confuzie de nume.

2°. Pe pag. a doua a copertei numărului 1 la al şaselea paragraf se înlocueşte XXIV prin XLIV.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (E, N); *Barbu A. I.* (5861, 65, 907, 53, E); *Braşoveanu D. Gh.* (5852, 71, 96, 938, E); *Cetăţeanu Stelian* (5920, 28); *Constantinescu N. Ilie* (5937, 44, 71, 6002); *Constantinescu R. Mihai* (5835, 73, 75, 87, 93, 94, 95, 96, 908, 20, 21, 24, 36, 38, 43, 44, 50, 51, 57, 66, 71, 80, 81, 90, E, N); *Diaconu C. C.* (5940, 51, 54, 66, 80, 81, 82, 85); *Dumitrescu G. Tr.* (5677); *Grigore A. Gh.* (5865, 82, E); *Leon A. Mihai* (5870, 71, 907); *Vrânceanu Gh. Gh.* (5680, 81, 739, 800, 03, 50, 61, 906, 20, 21, 71, 95); *Wegener N. E.* (4540, 42, 5294, 895, 988, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 800 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 80 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190.

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de analitică,* Partea. II-a Lei 600

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 26.663.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ
A UNIVERSITĂȚII
SIBIU

SUMARUL

1. Asupra distribuției numerelor prime . *C-dor I. Linteș.*
2. Asupra unei probleme de geometrie . *C. Borș.*
3. O generalizare a identității lui Lagrange *Victor Vâlcovici.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1945 *Delegația Societății.*
5. Raport asupra premiului „Ing H. Capriel" *Comisiunea pentru premii*
6. Raport pentru decernarea premiului „Vasile Conta" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
7. **Note matematice:** 8 — 11.
8. Chestiuni de examen.
9. **Bibliografie.**
10. **Diverse.**
11. **Probleme rezolvate:** 4596, 4680, 5431, 5533, 5540, 5684, 5842, 5849.
12. **Exerciții:** 5 — 7.
13. **Probleme propuse:** 6036 — 6049.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6006, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60,

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

ASUPRA DISTRIBUȚIEI NUMERELOR PRIME

Se știe din „Aritmetica transcendentă" că: „*Pentru* $2n > 7$, *între* n *și* $2(n-1)$ *este cel puțin un număr prim*".

Această teoremă, atribuită lui BERTRAND, a fost demonstrată de TCHEBYCHEF.

Imi propun, în cele ce urmează, să restrâng intervalul de mai sus, demonstrând teorema:

„*Intre:* $n.(n+1)$ *și* $(n+1)^2$ *este totdeauna cel puțin un număr prim dacă avem* $n \geqslant 2$".

Mai întâi voiu arăta că intervalul dintre $2(n-1)$ și n (de mai sus) este mai mare decât intervalul dintre: $(n+1)^2$ și $n.(n+1)$ din teorema ce ne propunem.

In adevăr, dacă facem în prima teoremă substituția $x = n$, apoi egalăm numerele cele mai mici, adică $x = n(n+1)$ se vede lesne că $2(x-1) > (n+1)^2$.

In adevăr, ținând seamă de prima neegalitate, a doua devine:

$$2[n(n+1)-1] > (n+1)^2.$$

Neegalitate care se poate simplifica la: $n^2 > 3$, deci trebue să avem $n \geqslant 2$.

Apoi, pentru demonstrația teoremei ce ne propunem, voiu arăta că:

„*Numărul numerelor prime din intervalul de numere consecutive dela* A *la* B *este:*

$$I_{A \to B}[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{B})]$$

unde în paranteză avem produsul tuturor numerelor prime inferioare întregului lui $\sqrt{B}$ *și unde* $I_{A \to B}(N)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* N *din intervalul de numere dela* A *la* B".

In consecință, numerele din intervalul de numere consecutive dela A la B, cari vor fi prime cu produsul tuturor numerelor prime până la $(\sqrt{B})$, adică până la numărul prim imediat inferior întregului din $\sqrt{B}$, vor fi de fapt numere prime. Aceasta se poate ușor constata căci dacă P este un număr cuprins între A și B (adică avem $A < P < B$), atunci dacă P este un număr compus, el va avea factori primi mai mici ca $(\sqrt{B})$, iar dacă va fi prim,

el va fi mai mare ca $(\sqrt{B})$. Dar dacă P este compus, va cuprinde numere prime mai mici ca $(\sqrt{B})$, deci nu va fi prim cu $[2.3.5.7...(\sqrt{B})]$, aşa dar expresiunea dată nu poate reprezenta decât numere prime.

Acum, pentru ca să demonstrăm teorema ce ne-am propus, vom încerca să determinăm pe A şi B, astfel încât să avem:

$$I_{A \to B}[2.3.5.7...(\sqrt{B})] = 1$$

ceea ce ar corespunde cazului când între A şi B ar fi numai un singur număr prim.

Din o serie de memorii publicate asupra indicatorilor în *Gazeta Matematică*, ne reamintim că avem:

$$I_{A \to B}(N) = I_B(N) - I_A(N).$$

Vom admite însă că: $B = A + \alpha$ unde $\alpha > 0$ este un număr întreg. Atunci, de asemenea ştim că avem:

$$I_B(N) = I_{A+\alpha}(N) = I_A(N) + I_\alpha(N) - \varepsilon$$

unde $\varepsilon = 0$ sau 1 după cum N este divizibil sau prim cu A şi α, urmează că vom avea deci:

$$I_B(N) \leqslant I_A(N) + I_\alpha(N).$$

Şi prin urmare:

$$I_{A \to B}(N) \leqslant I_\alpha(N).$$

Sau în cazul teoremei:

$$I_{A \to B}[2.3.5.7...(\sqrt{B})] \leqslant I_\alpha[2.3.5.7...(\sqrt{B})].$$

Dar nu trebue să neglijăm faptul că: $I_\alpha[2.3.5.7...(\sqrt{B})]$ reprezintă numărul numerelor prime cu paranteza din şirul de numere consecutive dela $(\sqrt{B})$ la α, iar nicidecum dela 1 la α cum s'ar crede, deoarece paranteza cuprinde toate numerele prime dela 1 la $(\sqrt{B})$.

Deci va trebui să avem: $\alpha \leqslant (\sqrt{B})$ pentru ca între A şi B să avem un singur număr prim. Cum însă nu ştim cât de mic poate să fie α faţă de $(\sqrt{B})$, vom admite $\alpha = (\sqrt{B})$ şi vom spune că: *„între* A *şi* B *se va găsi cel puţin un număr prim"*.

Sau dacă $\alpha = (\sqrt{B})$, urmează că avem $A = B - (\sqrt{B})$ şi dacă notăm $(\sqrt{B}) - 1 = n$, obţinem $A = n(n+1)$ şi deci $B = (n+1)^2$. Adică tocmai ceea ce ne-am propus.

Sprijinit pe aceste teoreme, stabilite cu ajutorul indicatorilor şi pe unele cazuri particulare, pe care nu le mai dau aci, voiu mai stabili, în cele ce urmează încă o serie de teoreme relative la „distribuţia numerelor prime".

V. *In primele* n *numere naturale avem cel puţin:*

$$2[(\sqrt{n}) - 1] - 1 \quad \text{sau} \quad 4{,}78 \ldots \log n$$

numere prime.

In adevăr în baza *teoremei I* între $(n-1)\,n$ şi n^2 avem cel puţin un număr prim, deci în primele n^2 numere naturale vom avea intervalele:

$$n^2 \to (n-1)\,n \to (n-1)^2 \to (n-2)\,(n-1) \to \ldots \to 2^2 \to 1.2$$

în care se va găsi cel puţin un număr prim, adică vom avea în total $[2(n-1) - 1]$ intervale, deci cel puţin:

$$2(n-1) - 1 = 2n - 3$$

numere prime.

Dacă în locul lui n^2 substituim pe n şi în locul lui n partea întreagă a radicalului, adică $(\sqrt{n})$, atunci obţinem primul rezultat.

Direct, intervalele se pot scrie:

$$n \to [(\sqrt{n}) - 1]\,(\sqrt{n}) \to [(\sqrt{n}) - 2]\,[(\sqrt{n}) - 1] \to \ldots \to 2.3 \to 1.2.$$

Adică, cel puţin:

$$2[(\sqrt{n}) - 1] - 1 = 2(\sqrt{3}) - 2$$

numere prime.

De asemenea în baza *teoremei II* între n şi $1{,}618 \ldots n$ avem cel puţin un număr prim, atunci putem forma intervalele:

$$1 \to 1{,}618 \to (1{,}618)^2 \to \ldots \to (1{,}618)^{x-1} \to (1{,}618)^x$$

Deci dela 1 la $(1{,}618)^x$ avem cel puţin x numere prime. Ori, dacă facem;

$$n = (1{,}618 \ldots)^x$$

atunci obţinem: $x = 4{,}78 \ldots \log n$.

VI. *In intervalul de numere dela* a *la* b *se găsesc cel puţin:*

$$2\,[(\sqrt{b}) - (\sqrt{a})] \quad \text{sau} \quad 4{,}78 \cdot \log \cdot \frac{b}{a}$$

numere prime.

In adevăr, conform teoremei V, până la a avem: $2(\sqrt{a}) - 3$ sau $4{,}78 \log a$, iar până la b avem: $2(\sqrt{b}) - 3$ sau $4{,}78 \log b$, prin urmare făcând diferenţa obţinem tocmai ceea ce era de demonstrat.

VII. *Dacă între* A *şi* B *avem* n *numere prime, atunci între* A^2 *şi* B^2 *vom avea cel puţin* $2(n+1)$ *numere prime.*

Conform teoremei III, dacă facem $k = A$ sau $k = B$, atunci vedem că în intervalele $A^2 \to A \cdot B$ sau $AB \to B^2$ avem mai multe numere prime decât între A şi B, deci vom avea cel puţin

$$(n+1) + (n+1) = 2(n+1)$$

numere prime.

VIII. *Intre patratele a două numere consecutive avem cel puţin două numere prime.*

Conform teoremei I, între $n(n+1)$ şi $(n+1)^2$ avem cel puţin un număr prim.

Conform teoremei VII între A^2 şi $A \cdot B$ avem mai multe numere decât între A şi B.

Deci dacă facem $A = n$ şi $B = n+1$, atunci între n şi $(n+1)$ avem zero sau un număr prim, prin urmare între n^2 şi $n(n+1)$ vom avea mai multe, adică cel puţin un număr prim.

Aşa dar între n^2 şi $(n+1)^2$ avem cel puţin $1+1=2$ numere prime.

COMANDOR I. LINTEŞ.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE

Domnul G-L GH. BUICLIU dă, la pag. 53, Vol. XLVIII în articolul *„Un loc geometric elementar"*, o soluţie completă prin geometrie elementară problemei Nr. 5024 a cărei soluţie s'a publicat la pag. 474, Vol. XLVII.

O soluţie proiectivă a acestei probleme sugerează o generalizare şi evidenţiază alte proprietăţi.

Dacă x şi $\bar{x}$ sunt puncte pe laturile AB *şi* AC *ale unui triunghiu* ABC *aşa fel încât*

$$(1) \qquad Bx = C\bar{x},$$

punctul $m = B\bar{x}$. Cx *descrie o dreaptă.*

Intre punctualele (x) şi $(\bar{x})$ relaţia (1) defineşte 2 afinităţi de modul 1 (congruenţe) $\alpha' = (x, \bar{x}')$ şi $\alpha'' = (x, \bar{x}'')$, diferite prin sensurile de parcurs [1]).

In adevăr din (1) rezultă că punctului impropriu x_∞ al laturii AB îi corespunde în amândouă corespondenţele α' şi α'', punctul impropriu $\bar{x}_\infty$ al laturii AC.

Deci corespondenţele α' şi α'' sunt afinităţi. Punctele B şi C fiind omoloage în amândouă afinităţile *modulul* lor este

$$K = |Bx| : |Cx| = 1$$

adică afinităţile α' şi α'' sunt congruenţe.

Punctului A, socotit în punctualele (x) şi $(\bar{x})$, îi corespund în α' respectiv punctele a' şi $\bar{a}'$, aşa fel încât $C\bar{a}' = c$ şi $Ba' = b$, iar în α'' îi corespund în acelaşi mod punctele $\bar{a}''$ şi a'', aşa fel încât $C\bar{a}'' = c$ şi $Ba'' = b$.

Punctele $m' = C\bar{x}$. Bx' şi $m'' = Cx'$. $B\bar{x}''$ sunt, respectiv în α' şi α'', puncte de intersecţie ale dreptelor care unesc cruciş puncte corespunzătoare. Deci (PAPPUS) punctele m' şi m'' vor descrie fiecare câte o dreaptă δ' şi δ'', axele celor 2 afinităţi. Axul δ', conţine omoloagele a' şi $\bar{a}'$ ale lui A în α' şi δ'' punctele a'' şi $\bar{a}''$, omoloagele lui A în α''.

Perechile de puncte (B, C) şi $(x_\infty\ \bar{x}_\infty)$ fiind omoloage în amândouă afinităţile, punctul $A' = B\bar{x}_\infty$. Cx_∞ se află la intersecţia axelor δ' şi δ'', $A' = \delta' . \delta''$.

Axele δ' şi δ'' sunt bisectoarele unghiului A'. In adevăr $\sphericalangle BAm = \sphericalangle Ba'm$ căci $BA' = Ba' = b$, iar $\sphericalangle Ba'm' = \sphericalangle CA'm'$ (patrulaterul ABCA' este un paralelogram căci $B\bar{x}_\infty \parallel AC$ şi $Cx_\infty \parallel AB$). Rezultă $\measuredangle BA'm' = \sphericalangle CA'm'$. La fel $CA' = C\bar{a}'' = c$, deci

$$\sphericalangle CA'\bar{a}'' = \sphericalangle C\bar{a}''A' ; \quad \sphericalangle \bar{x}_\infty A'\bar{a}'' = \sphericalangle C\bar{a}''A'$$

adică $$\measuredangle CA'\bar{a}'' = \measuredangle \bar{x}_\infty A'\bar{a}''.$$

1) Accentele ' şi '' arată respectiv că sensurile de parcurs în cele 2 punctuale sunt sau nu echivalente.

Observații. 1. Problema poate fi rezolvată arătând că omografiile $w' = (B\bar{x}', Cx)$ și $w'' = (B\bar{x}'', Cx)$ sunt omologii. In adevăr dreapta BC, comună fascicolelor omografice, este unită (propria ei omoloagă în w' și în w'').

Locurile geometrice ale punctelor m' și m'' de intersecție a 2 raze omoloage în omologiile w' și w'' sunt respectiv δ' și δ'' axele acestor omologii.

Axele δ' și δ'' trec prin punctul $A' = B\bar{x}_\infty . Cx_\infty$, căci dreptele $B\bar{x}_\infty$ și Cx_∞ sunt omoloage în w' și în w''.

2. *Înfășurătoarea dreptei* $x\bar{x}$ *este o parabolă* π *înscrisă în triunghiul* ABC.

In adevăr, α' și α'' fiind afinități, dreptele $x\bar{x}'$ și $x\bar{x}''$, care unesc perechi de puncte omoloage, înfășoară 2 parabole π' și π'', înscrise în triunghiul ABC. Punctele de contact ale parabolelor π' și π'' cu laturile AB, AC și BC sunt respectiv ternele de puncte $(a', \bar{a}', p')$ și $(a'', \bar{a}'', p'')$.

a) *Triunghiurile* $T(a'\bar{a}'p')$ *și* $T(a''\bar{a}''p)$ *sunt omologice cu triunghiul* ABC, căci dreptele care unesc vârfurile unui triunghiu circumscris unei conice cu punctele de contact ale laturilor opuse, sunt concurente (BRIANCHON).

b) *Axele* δ' *și* δ'' *trec respectiv prin punctele de contact* p'' *și* p' *ale laturii* BC *cu parabolele* π'' *și* π'. Fie o' și o'' centrele de omologie ale triunghiurilor (TT') și (TT") și $\bar{p}''$, $\bar{p}'$ punctele de intersecție cu latura BC ale dreptelor δ' și δ''. Din proprietățile de armonie ale patrupunctului ABCo', latura Ao' trece prin armonicul punctului $\bar{p}''$ față de punctele B și C, adică prin punctul de contact p' al laturii BC cu parabola π'. Deci $(BC\bar{p}''p') = -1$ și cum $(BCp''p') = -1$ rezultă $\bar{p}'' = p''$. La fel, din patrupunctul ABCo'' se deduce $\bar{p}' = p'$.

c) *Parabolele* π' *și* π'' *au ca axe dreptele* $\bar{\delta}''$ *și* $\bar{\delta}'$, *bisectoarele — exterioară și interioară — ale unghiului* A, căci triunghiurile $Aa'\bar{a}'$ și $Aa''a''$ sunt isoscele iar dreptele $a'\bar{a}'$ și $a''\bar{a}''$ sunt polarele vârfului A în raport cu parabolele π' și π''.

Focarele f' și f'' se află la intersecția cercului circumscris triunghiului ABC, respectiv cu $\bar{\delta}''$ și $\bar{\delta}'$. Deci focarele f' și f'' sunt puncte diametral opuse.

Consecință. Dreptele lui SIMSON ale punctelor f' și f'' sunt tangente în vârfurile parabolelor π' și π'', căci proiecția focarului pe tangenta parabolei este tangenta la vârf.

d) *Triunghiul* A'B'C', *anticomplimentar triunghiului* ABC, *este polar în raport cu parabolele* π' *și* π''. In adevăr, triunghiul A'B'C' este triunghiu diagonal al patrulaterului bază al fascicolului tangențial de parabole (π', π'').

3. *Dacă* x *și* $\bar{x}$ *sunt puncte pe laturile* AB *și* AC *ale unui triunghiu așa fel încât* $Bx = K \cdot C\bar{x}$, K *fiind o constantă, punctul* $m = B\bar{x} \cdot Cx$ *descrie o dreaptă* δ, *iar dreapta* $x\bar{x}$ *înfășoară o parabolă* π *înscrisă în triunghiu.*

In acest caz corespondențele α' și α'' sunt afinități de modul $K = |Bx| : |C\bar{x}|$, sensurile de parcurs ale punctualelor $(\bar{x'})$ și $(\bar{x''})$ pe latura AC fiind diferite. Axele δ' și δ'' trec prin punctele a', $\bar{a'}$, și a'', $\bar{a''}$ determinate prin egalitățile

$$Aa' = bK - c,\ A\bar{a'} = (bK - c) : K,\ Ba' = B\bar{a''} = bK,\ Ca' = C\bar{a'} = c : K.$$

Ca și în cazul congruențelor, perechile (B, C) și $(x_\infty \bar{x}_\infty)$ sunt omoloage, deci axele δ' și δ'' se intersectează în A'.

Biraportul $A(BCp'p'')$ este armonic adică axele δ' și δ'' separă armonic dreptele AB, AC (demonstrația este aceeași ca și în cazul particulor $K = 1$).

Infășurătoarele dreptelor $x\bar{x'}$ și $x\bar{x''}$ sunt două parabole π' și π'' înscrise în triunghiul ABC, cu direcțiile axelor paralele respectiv cu δ'' și δ' căci dreptele $x\bar{x'}$ și $x\bar{x''}$ unesc puncte corespunzătoare în afinitățile α' și α''. Direcțiile axelor acestor parabole sunt medianele Aq' și Aq'' ale vârfului A respectiv în triunghiurile $Aa'\bar{a'}$ și $Aa''\bar{a''}$.

Medianele Aq' și Aq'' sunt paralele cu δ' și δ'. In adevăr, din triunghiurile asemenea $Aa'\bar{a'}$ și $A'a'\bar{a'}$ rezultă

$$\frac{C\bar{a'}}{A\bar{a'}} = \frac{A'\bar{a'}}{a'\bar{a'}}.$$

Această egalitate se poate scrie

$$\frac{2C\bar{a}'}{A\bar{a}'} = \frac{A'\bar{a}'}{a'\bar{a}'} \quad \text{sau} \quad \frac{\bar{a}'\bar{a}''}{A\bar{a}'} = \frac{A'\bar{a}'}{q'\bar{a}'}$$

C şi q' fiind mijloacele segmentelor $\bar{a}'\bar{a}''$ şi $\bar{a}'\bar{a}'$. Din ultima egalitate rezultă că triunghiurile $Aq'\bar{a}'$ şi $A'\bar{a}'\bar{a}''$ sunt asemenea, deci $Aq' \parallel \delta''$.

La fel se arată că $Aq'' \parallel \delta'$.

Dreptele Aq', Aq'' *separă armonic laturile* AB *şi* AC.

In adevăr, dacă a'_∞ şi a''_∞ sunt punctele improprii ale dreptelor δ' şi δ'', avem

$$A'(CBa'_\infty\ a''_\infty) = (x_\infty\ \bar{x}_\infty\ a'_\infty\ a''_\infty) = -1.$$

Proiectând din punctul A cuaterna improprie de puncte $x_\infty\ \bar{x}_\infty\ a'_\infty\ a''_\infty$, rezultă

$$(x_\infty\ \bar{x}_\infty\ a'_\infty\ a''_\infty) = A(BCa'_\infty\ a''_\infty) = -1.$$

Dreptele Aq' şi Aq'' fiind paralele cu axele parabolelor π' şi π'', după o proprietate a parabolei, focarele f' şi f'' se află la intersecţia cercului circumscris triunghiului cu dreptele Af' şi Af'' aşa fel încât

$$(2) \qquad \sphericalangle\, CAf' = \sphericalangle\, q'Aa' \quad ; \quad \sphericalangle\, CAf'' = \sphericalangle\, q''Aa''.$$

4. Considerând modulul K al afinităţilor α' şi α'' variabil, se pot enunţa unele proprietăţi în legătură că triunghiul ABC şi fascicolul (π) de parabole, înscrise în acest triunghiu, şi împărţit în 2 familii (π') şi (π'').

a) *Axele* δ' *şi* δ'' *ale afinităţilor* α' *şi* α'' *se corespund într'o involuţie hiperbolică de drepte duble* AB *şi* AC, căci $A'(BCp'p'') = -1$. In cazul particular $K = 1$, axele δ' şi δ'' alcătuesc perechea ortogonală a involuţiei, adică bisectoarele unghiului A'.

Dreptele Aq' şi Aq'' sunt omoloage în evoluţia hiperbolică de drepte duble AB şi AC.

b) *Focarele* f' *şi* f'' *ale familiilor de parabole* (π') *şi* (π'') *sunt puncte corespunzătoare într'o involuţie hiperbolică de puncte duble* B *şi* C, *pe cercul circumscris triunghiului.*

Dreptele Af' şi Af'' se corespund într'o involuţie I, căci sunt omoloagele — în congruenţa indirectă ce are ca drepte duble bisectoarele unghiului A — ale dreptelor Aq' şi Aq'' care se

corespund involutiv. Dreptele duble ale involuției I sunt laturile AB și AC. In adevăr, dacă $Af' \equiv AC$ atunci $Aq' \equiv AB$ și în virtutea biraportului $A(BCq'q'') = -1$ rezultă $Aq'' \equiv AB$, care atrage, $Af'' \equiv AC$ conform relațiilor (2).

La fel se demonstrează că și latura AB este dublă pentru involuția I, deci, pe cercul circumscris triunghiului, $(BCf'f'') = -1$, adică punctele f' și f'' sunt omoloage în involuția de puncte duble B și C. Axul acestei involuții fiind dreapta BC, centrul involuției va fi A'', polul laturii BC în raport cu cercul circumscris triunghiului. Deci

Dreapta f'f'', care unește focarele celor 2 familii de parabole, trece printr'un punct fix, polul laturii BC *în raport cu cercul circumscris triunghiului.*

c) *Locul centrelor de omologie o' și o'' este o conică circumscrisă triunghiului* ABC *și tangentă în* B *și* C *laturilor* AB *și* AC. Când K variază, axele δ' și δ'' rotindu-se în jurul punctului A', descriu pe laturile AB și AC două omologii $(a', \bar{a}')$ și $(a'', \bar{a}'')$. Aceste omologii, având punctul unit A și perechile $(B, \bar{x}_\infty)$, (C, x_∞) comune, coincid. Fascicolele $(B\bar{a}')$ și (Ca'), care proiectează punctele corespunzătoare în această omologie, sunt omografice și punctul de intersecție a 2 raze corespunzătoare generează o conică γ, care conține centrele fascicolelor B și C și este tangentă în B și C la AB și AC, corespunzătoarele dreptei comune BC în cele 2 fascicole. Conica γ trece și prin punctul A, dreptele BA și CA fiind omoloage în omografia dintre cele 2 fascicole.

Conica γ este nedegenerată căci dreapta comună BC nu este unită, adică omografia dintre fascicolele $(B\bar{a}'$ și (Ca') este neomologică.

d) *Dreapta centrelor de omologie o'o'' trece prin punctul* A'. Biraportul $A(BCp'p'')$ este armonic și deci pe conica $\gamma(BCo'o'') = -1$. Punctele o' și o'' se corespund — pe conica γ — în involuția hiperbolică de puncte duble B și C. Dreapta $o'o''$ va trece prin centrul involuției, polul axului BC al involuției în raport cu γ, adică punctul A'.

C. BORȘ.

O GENERALIZARE A IDENTITĂȚII LUI LAGRANGE

1. Celebra identitate a lui LAGRANGE se poate pune sub forma:

$$(1)\ \ldots\ (x_1^2+x_2^2)\,(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

pentru cazul a două dimensiuni. Ea este susceptibilă de o anumită interpretare geometrică, des folosită în teoria vectorilor.

O generalizare a acestei identități se poate obține încercând a lua trei șiruri de mărimi în loc de două: x și y. Fie a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 cele trei șiruri de mărimi. Cu ele se poate forma următoarea identitate ușor verificabilă:

$$(2)\ \ldots\ (a_1+a_2)\,(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)-(a_1b_1+a_2b_2)\,(a_1c_1+a_2c_2)$$
$$=a_1a_2\,(b_1-b_2)\,(c_1-c_2).$$

Identitatea lui LAGRANGE se poate obține din aceasta punând:

$$(3)\ \ldots\ \ a_ib_i=a_ic_i=x_iy_i\ \ ,\ \ a_i=x_i^2\ \ ,\ \ i=1,\ 2.$$

2. Pentru a-i da identității (2) o interpretare geometrică o vom pune sub forma:

$$(4)\ \ldots\ a_1b_1c_1+a_2b_2c_2=\frac{(a_1b_1+a_2b_2)\,(a_1c_1+a_2c_2)+a_1a_2\,(b_1-b_2)\,(c_1-c_2)}{a_1+a_2}.$$

Presupunând că a_1, a_2 ar fi masele a două puncte materiale P_1, respectiv P_2 și b_1, c_1; b_2, c_2 coordonatele lor carteziene față de două axe rectangulare situate într'un plan conținând și punctele P_1, P_2, atunci identitatea (4) poate avea o interpretare în legătură cu geometria maselor. Cu notațiile obișnuite, identitatea (4) devine:

$$(4')\ \ldots\ m_1x_1y_1+m_2x_2y_2=\frac{(m_1x_1+m_2x_2)\,(m_1y_1+m_2y_2)}{m_1+m_2}$$
$$+\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(x_1-x_2)\,(y_1-y_2).$$

Primul membru al acestei identități este expresia *momentului de deviație (produsului de inerție)* al sistemului alcătuit din punctele materiale P_1, P_2.

Membrul al doilea e compus din doi termeni. Primul termen este produsul

$$(m_1 + m_2)\,\xi\eta,$$

unde am însemnat cu ξ, η coordonatele centrului de greutate al sistemului; aşa dar acest termen poate fi interpretat ca exprimând momentul de deviaţie al centrului de greutate în care s'ar fi concentrat toată masa. Cel de al doilea termen conţine în factor aria dreptunghiului având diagonala P_1P_2 şi laturile paralele cu axele de coordonate — arie luată pozitiv sau negativ după cum paralela dusă prin origine la P_1P_2 se află în cadranele I şi III sau în cadranele II şi IV. Pentru a scurta expresia, vom spune că e vorba de *aria algebrică a dreptunghiului* P_1P_2. Cu această convenţie, termenul al doilea de care ne ocupăm, sub forma:

$$(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2),$$

poate fi interpretat ca exprimând aria algebrică a dreptunghiului P_1P_2 multiplicată cu procentele maselor şi cu masa totală. Vom numi această expresie: *momentul dreptunghiular al punctelor* P_1P_2, sau *al sistemului.*

Aşa dar, identitatea (4') poate fi interpretată în felul următor: *momentul de deviaţie al unui sistem de două puncte materiale este egal cu momentul de deviaţie al centrului de greutate unde ar fi concentrată toată masa, mărit cu momentul dreptunghiular al sistemului.*

3. Forma (4) a identităţii ne spune că în al doilea membru al ei putem face permutări între literele *a, b, c* fără ca valoarea expresiei din acel membru să se schimbe. In adevăr, orice astfel de permutări lasă neschimbată valoarea expresiei din membrul întâ

Deducem identităţile:

$$(5)\ldots\quad \frac{(a_1b_1+a_2b_2)\,(a_1c_1+a_2c_2) + a_1a_2\,(b_1-b_2)\,(c_1-c_2)}{a_1+a_2}$$

$$= \frac{(b_1c_1+b_2c_2)\,(b_1a_1+b_2a_2)+b_1b_2\,(c_1-c_2)\,(a_1-a_2)}{b_1+b_2}$$

$$= \frac{(c_1a_1+c_2a_2)\,(c_1b_1+c_2b_2)+c_1c_2\,(a_1-a_2)\,(b_1-b_2)}{c_1+c_2}$$

$$= a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2.$$

Făcând în ultima identitate $c_1 = c_2 = 1$ obținem:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \frac{(a_1 + a_2)\,(b_1 + b_2) + (a_1 - a_2)\,(b_1 - c_2)}{2}.$$

Această identitate, care de altfel se poate ușor verifica direct, conține altele de o întrebuințare curentă în calcule. De pildă, făcând $a_1 = b_1 = a$, $a_2 = b_2 = b$, avem:

$$a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}.$$

Făcând $a_1 = b_2 = a$, $a_2 = b_1 = b$, avem:

$$2ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2}.$$

4. Identitatea (2) este susceptibilă de a fi extinsă la cazul unui număr oarecare n de grupuri de mărimi. Fie în adevăr

$$a_i,\ b_i,\ c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$3n$ mărimi care se supun regulilor obișnuite algebrice ale operațiunilor elementare. Ne propunem a dovedi că aceste mărimi satisfac identitatea:

$$(6)\ldots \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k (b_i - b_k)(c_i - c_k).$$

Am demonstrat că identitatea există în cazul $n = 2$. Dacă vom dovedi acum că fiind valabilă până la indicele n, ea va fi valabilă și pentru indicele $n+1$, vom fi dovedit existența ei în toată generalitatea.

Vom observa în acest scop că avem:

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i c_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)$$

$$+ a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i + a_{n+1}^2 b_{n+1} c_{n+1},$$

sau, folosindu-ne de identitatea (6) pe care o presupunem adevărată pentru indicele n şi făcând unele transformări evidente în membrul al doilea al relaţiei precedente,

$$(7)\ldots\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i c_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k (b_i - b_k)(c_i - c_k)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1}(b_i c_i + b_{n+1} c_{n+1}) + a_{n+1}^2 b_{n+1} c_{n+1}.$$

Insă se poate verifica lesne relaţia:

$$a_i a_{n+1}(b_i c_i + b_{n+1} c_{n+1}) = a_i a_{n+1}(b_i - b_{n+1})(c_i - c_{n+1})$$
$$+ a_i a_{n+1}(b_i c_{n+1} + b_{n+1} c_i).$$

Observând apoi că expresia

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1}(b_i c_{n+1} b_{n+1} c_i)$$

din membrul al doilea al relaţiei (7) este egală cu:

$$a_{n+1} c_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) + a_{n+1} b_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)$$

şi făcând înlocuirea în (7) obţinem identitatea (6) pentru valoarea $n+1$ a indicelui n. Aşa dar identitatea este adevărată.

5. Identitatea (6) poate fi privită ca o generalizare a identităţii lui LAGRANGE. In adevăr, făcând în (6) substituţia (3) pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ obţinem:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i y_k - x_k y_i)^2,$$

adică tocmai forma în n dimensiuni a identităţii lui LAGRANGE.

6. Pentru a-i da identității (6) o interpretare concretă, vom recurge, ca și în cazul $n = 2$, la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k (b_i - b_k)(c_i - c_k)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

din care de altfel, în treacăt fie spus, putem scoate șirul de identități corespunzător șirului (5).

Presupunând că a_i ar fi masa punctului material P_i (sistemul de puncte fiind coplanar) și că b_i, c_i ar fi coordonatele carteziene ale acestui punct, relația precedentă devine, întrebuințând iarăși notațiile obișnuite în Mecanică:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_i m_k (x_i - x_k)(y_i - y_k)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

sau încă:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = M\xi\eta + \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_i \mu_k D_{ik},$$

unde am însemnat cu M masa totală a sistemului, cu ξ, η coordonatele centrului său de greutate, cu μ_i, μ_k procentele maselor m_i, m_k față de masa totală și cu D_{ik} aria algebrică a dreptunghiului construit pe diagonala $P_i P_k$ și având laturile paralele la axe. Identitatea precedentă poate fi interpretată astfel:

Momentul de deviație al unui sistem plan este egal cu momentul de deviație al centrului său de greutate unde ar fi concentrată toată masa, mărit cu momentul dreptunghiular al sistemului.

Ce înțelegem prin momentul dreptunghiular al sistemului reiese imediat din cele spuse la Nr. 2. Pentru a-i obține valoarea, luăm aria algebrică a dreptunghiului de diagonală $P_i P_k$, o multiplicăm cu procentele μ_i, μ_k, facem apoi suma algebrică a tuturor acestor produse și pe aceasta o multiplicăm la urmă cu masa totală. Orice dreptunghiu D_{ik} intervine în sumă de două ori, încât vom împărți suma cu 2.

VICTOR VÂLCOVICI.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1945

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 28 August a. c., a hotărît ţinerea concursului tradiţional de matematici în anul 1945, între elevii liceelor civile şi militare din întreaga ţară.

Concursul va avea loc după sărbătorile Sfintelor Paşte. Data precisă şi locul unde se va ţine concursul se va anunţa în numărul 6 din Februarie 1945 al revistei *Gazeta Matematică*, când se va publica şi numele candidaţilor admişi la concurs.

2. Elevii cari doresc să se înscrie la concurs, sunt obligaţi să candideze la două din materiile menţionate aici pentru clasa în care urmează:

Clasa a IV-a: Algebra, geometria în spaţiu;

Clasa a V-a: Aritmetica raţionată, algebra, geometria plană;

Clasa a VI-a: Teoria numerelor, trigonometria, geometria în spaţiu;

Clasa a VII-a: Algebra, geometria proiectivă şi descriptivă;

Clasa a VIII-a: Mecanica, geometria analitică, algebra.

Sunt *obligatorii:* Aritmetica raţionată pentru clasa a V-a; teoria numerelor pentru clasa a VI-a şi mecanica pentru clasaa VIII-a.

3. Candidaţii vor da câte o probă scrisă şi câte un examen oral la ambele materii pentru care s'au înscris.

Nu se acordă candidaţilor niciun fel de scuză pentru nepregătirea unora din capitolele trecute în programul clasei lor, pentru obiectele la care s'au înscris la concurs.

4. Inscrierea la concurs se face numai prin cerere individuală, *scrisă personal* de candidat şi trimisă în plic recomandat, cel mai târziu până la 15 Ianuarie 1945, pe adresa Societăţii *Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.*

Nu se primesc cereri trimise de părinţi, rude corespondenţi, profesori sau şcoli.

5. In cerere candidatul va arăta pe puncte în ordinea următoare:

a) Numele de familie, numele de botez.

b) Şcoala şi clasa în care urmează candidatul. Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul pentru clasa precedentă.

c) Adresa personală:

— în timpul şcolii;

— în timpul vacanţei de Paşte.

d) Dacă dispune de mijloace de a veni la Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului sau dacă unul din aceste mijloace ar trebui să-i fie procurate.

Cei cari au nevoie de bani pentru drum vor arăta gara de plecare pentru a veni la concurs şi gara de înapoiere dela concurs.

e) Materiile la cari se înscrie la concurs, începând cu cele obligatoare pentru clasele V, VI şi VIII.

f) Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul Gazetei Matematice*, arătând numerele de ordine al problemelor şi al exerciţiilor rezolvate şi publicate sau menţionate. Se va arăta şi activitatea la alte reviste de matematici din ţară şi din străinătate.

6. Candidaţii înscrişi la concurs, cari din dfierite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte la concurs, sunt obligaţi să anunţe în scris şi din timp Societatea.

7. Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de a preda lucrarea scrisă.

8. Numărul candidaţilor ce se va admite la concurs se va hotărî ţinând seamă de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor precum şi de pregătirea pe care aceştia o vor arăta şi dovedi în cererile ce vor face.

9. Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi diplome, premii sau menţiuni.

Primul reuşit între candidaţi va primi şi premiul „LT.-COL. G. TĂNĂSESCU“, constând din cărţi.

Comisia examinatoare se va compune din membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, cari nu au rude sau elevi printre candidaţi.

10. **Programa analitică a concursului.**

Clasa a IV-a: 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

— Rezolvarea ecuaţiilor de gradul I cu una şi două necunoscute, cu coeficienţi literali;

— Reprezentarea grafică a ecuaţiei de gradul I cu două necunoscute şi a sistemelor de două ecuaţii cu două necunoscute.

2. *Geometria în spaţiu.* Toată materia prevăzută în programa analitică.

Clasa a V-a: 1. *Aritmetica raţionată* (obiect obligator). Operaţiile aritmetice. Divizori. Numere prime. Codivizorul maxim (c. m. m. d. c.) şi comultiplul maxim (c. m. m. c. m.). Fracţii ordinare, zecimale. Fracţii zecimale periodice şi fracţii generatoare. Rădăcini patrate. Rapoarte. Proporţii. Regula de trei. Dobânzi simple. Sconturi. Asociaţii. Amestecuri, aliaje.

2. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

La radicali se va face raţionalizarea numitorilor cari cuprind radicali de ordinul al II-lea şi suma de doi radicali de ordinul al III-lea şi al IV-lea.

La sisteme de ecuaţii de gr. I se vor cere sisteme cu rezolvări particulare (artificii de calcul).

Sisteme reductibile la gradul I şi II.

Transformarea expresiilor de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Variaţia şi reprezentarea grafică a trinomului de gradul al II-lea.

3. *Geometria plană.* Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

Locul geometric al punctelor astfel ca raportul distanţelor la două puncte fixe să fie constant.

Impărţirea unui segment în medie şi extremă raţie.

Patratul laturii unui triunghiu oarecare, diverse aplicaţii, calculul medianelor şi înălţimilor, unele locuri geometrice.

Inscrierea pentagonului şi decagonului regulat în cerc.

Teoremele lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulatere inscriptibile.

Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte. Axă şi centru radical.

Relaţia metrică a lui STEWART. Aplicaţii.

Clasa a VI-a. 1. *Teoria numerelor.*

Divizori: numărul, suma şi produsul divizorilor.

Indicatori. Teoremele lui FERMAT, EULER, WILSON.

2. *Trigonometria.* Toată materia prevăzută în programa analitică, afară de aplicaţiile trigonometriei la statică. In plus:

Aria unui triunghiu în funcţie de elementele lui.

Razele cercurilor: circumscris, înscris şi exînscrise.

Identităţi, ecuaţii şi sisteme trigonometrice.

Problema hărţii.

3. *Geometria în spațiu.* Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

Unghiuri triedre. Cazurile de egalitate ale triunghiurilor sferice și aria triunghiului sferic.

Volumul produs de un sector poligonal plan regulat, care se rotește în jurul unei axe.

Volumul segmentului sferic (mărginit la zonă sau calotă).

Clasa a VII-a. 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică pentru clasa a VI-a și a VII-a (fără aplicații la cinematică). In plus:

Determinanții de ordinul al IV-lea.

Găsirea punctelor de inflexiune.

Principalele criterii de convergență ale seriilor.

2. *Geometria proiectivă și descriptivă.*

Geometria proiectivă: Inversiunea. Diviziuni și fascicole anarmonice și armonice. Pol și polară în raport cu un unghiu și în raport cu un cerc. Polare reciproce.

Teoremele lui PASCAL și BRIANCHON. Patrulatere complete.

Geometria descriptivă. Punctul, dreapta, planul, intersecții de plane, de plan cu dreaptă. Epura unei prisme cu baza în planul orizontal și secțiunea plană într'o prismă.

Clasa a VIII-a. 1. *Mecanica.* (Obiect obligator). Toată materia prevăzută în programa analitică pentru clasa a VIII-a și Cinematica prevăzută pentru clasa a VII-a. In plus: lucrul mecanic.

2. *Geometria analitică.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Schimbarea de axe prin translație. Ecuațiile conicelor raportate la axe paralele cu axele lor. Pol și polară. Studiul geometric elementar al conicelor.

3. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Cantități complexe. Teorema lui MOIVRE. Ecuații binoame. Aplicații ale teoremei lui ROLLE la ecuații cu unu și doi parametri.

Toți candidații trebue să cunoască toată materia respectivă a claselor precedente, cu adăugirile prevăzute în această programă.

DELEGAȚIA SOC. „GAZETA MATEMATICĂ".

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „ING. H. CAPRIEL“

In *Gazeta Matematică*, Vol. XLV, pag. 461 s'a publicat subiectul propus pentru premiul cincinal de matematici superioare, pure sau aplicate, « ING. H. CAPRIEL ». Termenul ultim pentru predarea manuscriselor în vederea premiului era 1 Mai 1944. Până la acea dată nu s'a primit nicio lucrare în vederea premiului, aşa că el nu se poate acorda, iar valoarea sa se va adăuga, conform regulamentului, la premiul viitor, care se va acorda în 1949.

O nouă Comisiune pentru premiul « ING. H. CAPRIEL » va publica în numărul din Mai 1945 al *Gazetei Matematice* subiectul premiului propus, urmând ca manuscrisele concurente să fie trimise delegaţiei *Gazetei Matematice* până la 1 Mai 1949.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL DE MATEMATICI SUPERIOARE « ING. H. CAPRIEL »

GH. TH. GHEORGHIU, D. V. IONESCU,
P. SERGESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 28 August 1944.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CONTA“

In conformitate cu art. 4 din regulamentul premiului « VASILE CONTA », avem onoare a aduce la cunoştinţa D-vs. următoarele:

Potrivit art. 2 din acelaşi regulament, premiul « VALILE CONTA » se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Intru cât până la data de mai sus nu s'a prezentat nicio lucrare, premiul în sumă de lei 4.000, nu se poate acorda şi se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Suma de mai sus, urmează să se adauge la premiul anilor viitori.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CONTA“

Ing. I. CHIŢULESCU, Prof. O. ONICESCU,
Prof. P. SERGESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 28 August 1944.

NOTE MATEMATICE

8. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru N_9 începând cu 6 am găsit următoarele 82 soluții ale ecuației

$$9 \times N_9 = N$$

în care N_9 este format din 9 cifre diferite între ele și diferite de 9 iar N este un număr format din 10 cifre diferite.

N_9	N	N_9	N
603 542 178	5 431 879 602	645 238 071	5 807 142 639
607 813 254	5 470 319 286	645 238 107	5 807 142 963
607 814 352	5 470 329 168	645 327 018	5 807 943 162
607 821 354	5 470 392 186	645 823 071	5 812 407 639
623 045 871	5 607 412 839	645 823 107	5 812 407 963
625 487 130	5 629 384 170	651 327 480	5 861 947 320
627 534 801	5 647 813 209	652 130 478	5 869 174 302
627 534 810	5 647 813 290	652 378 041	5 871 402 936
630 457 821	5 674 120 389	652 378 104	5 871 402 369
631 045 782	5 679 412 038	652 384 701	5 871 462 309
631 275 480	5 681 479 320	652 384 710	5 871 462 390
632 157 480	5 689 417 320	652 403 781	5 871 634 029
632 415 870	5 691 742 830	652 410 378	5 871 693 402
634 780 251	5 713 024 689	652 437 180	5 871 934 620
634 781 052	5 713 029 468	652 734 801	5 874 613 209
635 204 781	5 716 843 029	652 734 810	5 874 613 290
635 210 478	5 716 894 302	654 701 823	5 892 316 407
635 471 820	5 719 246 380	657 082 314	5 913 740 826
635 480 712	5 719 326 107	657 134 082	5 914 206 738
637 582 401	5 738 241 609	657 180 342	5 914 623 078
637 582 410	5 738 241 690	657 180 423	5 914 623 807
637 802 154	5 740 219 386	657 203 418	5 914 830 762
638 547 012	5 746 923 108	657 208 134	5 914 873 206
640 215 378	5 761 938 402	657 380 412	5 916 423 708
642 573 801	5 783 164 209	657 381 420	5 916 432 780
642 573 810	5 783 164 290	657 412 038	5 916 708 342
643 257 180	5 789 314 620	657 413 820	5 916 724 380
643 571 820	5 792 146 380	658 127 430	5 923 146 870
643 780 152	5 794 021 368	658 712 304	5 928 410 736
645 132 708	5 806 194 372	670 215 843	6 031 942 587

1) Urmare la Nota 44 dela pag. 670, Vol. XLIX.

N_9	N	N_9	N
670 842 351	6 037 581 249	678 251 043	6 104 259 387
671 058 243	6 039 524 187	678 304 251	6 104 738 259
671 435 082	6 042 915 738	678 310 425	6 104 793 825
672 081 435	6 048 732 915	680 342 751	6 123 084 759
673 045 821	6 057 412 389	680 453 217	6 124 078 953
673 104 582	6 057 941 238	680 534 217	6 124 807 953
675 014 382	6 075 129 438	681 034 275	6 129 308 475
675 042 381	6 075 381 429	681 205 473	6 130 849 257
675 104 238	6 085 938 142	681 432 750	6 132 894 750
678 214 305	6 103 928 745	683 214 750	6 148 932 750
678 250 431	6 104 253 879	687 214 503	6 184 930 527

G-L GH. BUICLIU.

9. *Asupra indicatorilor.* Notăm cu $I_a(N)$ numărul numerelor prime cu N, cuprinse în şirul primelor a numere.

Imi propun să demonstrez egalitatea:

$$(1) \qquad I_a(p^s N) = I_a(N) - I_{p'}(N)$$

unde p este un număr prim care nu divide pe N, iar p' reprezintă numărul întregilor cuprinşi în fracţia a/p.

In adevăr în primele a numere se găsesc următorii multipli ai lui p:

$$p \; ; \; 2p \; ; \; 3p ; \ldots p'p,$$

iar dintre aceştia figurează printre numerele prime cu N numai cei de forma ip unde i este prim cu N, adică numai $I_{p'}(N)$ numere, ceea ce justifică egalitatea (1).

Din aproape în aproape, deducem

$$I_a(M.N) = I_a(N) - I_{p'}(N) - I_{q'}(N) - I_{r'}(N) \ldots + I_{(pq)}(N)$$
$$+ I_{(pr)'}(N) + \ldots - I_{(pqr)'}(N) - \ldots + \ldots$$

unde M este un număr prim cu N, $p, q, r \ldots$ factorii primi ai lui M, iar s' numărul întregilor cuprinşi în fracţia a/s.

Ca aplicaţie voiu determina *care este numărul numerelor prime cu 200 şi mai mici ca el care în acelaşi timp sunt prime şi cu 231* (G. M., Vol. XLVIII, pag. 470); adică numărul $I_{200}(2.3.5.7.11)$.

Conform relației (1) avem:

$$I_{200}(2.3.5.7.11) = I_{200}(2.3.5.7) - I_{18}(2.3.5.7)$$

fiindcă $$E\left(\frac{200}{11}\right) = 18$$

apoi $I_{200}(2.3.5.7) = I_{200}(210) = \varphi(210) - I_{200 \to 210}(210)$

$= \varphi(210) - I_{10}(210)$ $\therefore$ $I_{200}(210) = 48 - 1 = 47$

și $I_{18}(2.3.5.7) = 4$ deci $I_{200}(200 \times 231) = 47 - 4 = 43.$

(La pag. 470—471, Vol. XLVIII s'a găsit, din eroare, pe trei căi diferite $I_{200}(200 \times 231) = 42$.

I. B. FLORESCU.

10. *Notă asupra transformării ecuației de gradul al doilea.* In capitolul relativ la relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației de gradul al doilea se dă o atenție deosebită transformării reale, complementar simetrice a rădăcinilor acestei ecuații, pentru calculul elementar și direct pe care îl comportă dar mai ales pentru verificarea că noul discriminant reproduce printr'un factor pozitiv discriminantul vechiu, de unde concluzia că ecuațiile au rădăcinile de aceeași natură. Dată fiind uniformitatea procedeului și garantarea ultimului rezultat ne propunem să arătăm generalitatea lui.

Fie pentru aceasta, ecuația

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

cu rădăcinile x_1, x_2 și de discriminant

$$r = (x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q; \tag{2}$$

între x_1, x_2 și p, q existând relațiile

$$x_1 + x_2 = -p \quad , \quad x_1 x_2 = q. \tag{3}$$

Să facem transformarea

$$X_1 = f(x_1, x_2) \quad , \quad X_2 = f(x_2, x_1); \tag{4}$$

ecuația cu rădăcinile X_1, X_2 e de forma

$$X^2 + PX + Q = 0 \tag{5}$$

unde

$$-P = X_1 + X_2 = f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)$$

$$Q = X_1 X_2 = f(x_1, x_2) \cdot f(x_2, x_1)$$

deci P, Q sunt funcţii simetrice în x_1, x_2 deci se exprimă numai în p şi q.

Discriminantul ecuaţiei (5) este

$$R = (X_1 - X_2)^2 = [f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1)]^2.$$

Dar expresia din ultima paranteză este antisimetrică în x_1, x_2 deci se divide cu $x_1 - x_2$. Fie

$$(6) \qquad f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1) = (x_1 - x_2) \cdot \varphi(x_1, x_2).$$

Atunci

$$(7) \qquad R = r \cdot \varphi^2(x_1, x_2)$$

care este relaţia cerută căci $\varphi(x_1, x_2)$ dată de (6) este simetrică deci se exprimă numai în p şi q.

Aplicaţii. 1) fie $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{x_2}$.

Atunci

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} = -p + \frac{1}{q}.$$

Deci

$$R = r\left(-p + \frac{1}{q}\right)^2,$$

ceea ce se poate verifica, ecuaţia (5) fiind

$$qx^2 - (p^2q - 2q^2 - p)x + q^3 - pq + 1 = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

11. *Asupra exerciţiului 18 din G. M., Vol. XLIX, pag. 375.* In soluţia ce s'a dat acestui exerciţiu s'au folosit egalităţile

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r + r_a}{4R}, \quad \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{r + r_b}{4R}, \ldots \qquad (1)$$

care *nu sunt adevărate* decât în anumite triunghiuri.

In adevăr înlocuind cantităţile din relaţiile precedente în funcţie de laturi se ajunge la egalităţi ca

$$ap(p - a) = (b + c)(p - b)(p - c)$$

$$\therefore \quad a^3 + (b + c)a^2 + (b + c)^2 a - (b + c)(b - c)^2 = 0 \qquad (2)$$

care nu sunt identităţi. Deci numai dacă între laturile triunghiului avem condiţii ca (2) vom avea şi relaţiile (1).

Dacă însă ţinem seama că

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}=\frac{\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}}{bc}=\frac{r_b\,r_c}{bc}$$

atunci avem, oricare ar fi triunghiul,

$$3\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}-\Sigma\cos^6\frac{A}{2}$$

$$=\left[\Sigma\frac{r_b\,r_c}{bc}\right]\left[\Sigma\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}-\Sigma\cos^4\frac{A}{2}\right].$$

Inlocuind *cos* în funcţie de *sin*, obţinem următoarele relaţiuni interesante:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{r_a-r}{4R}\quad,\quad\sin^2\frac{B}{2}=\frac{r_b-r}{4R}\quad,\quad\sin^2\frac{C}{2}=\frac{r_c-r}{4R}$$

$$3\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}-\Sigma\sin^6\frac{A}{2}$$

$$=\left(\Sigma\frac{r_a-r}{4R}\right)\left[\Sigma\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}-\tfrac{1}{2}\Sigma\sin^4\frac{A}{2}\right].$$

M. R. CONSTANTINESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI

Examen de admitere Iulie 1944

Facultăţile de Chimie industrială şi Silvicultură

Algebra. *Problema 1.* Să se arate că b^2-4ac este un patrat perfect dacă

$$a+2b+4c=0 \quad \text{sau} \quad 9a+3b+c=0.$$

Problema 2. Intr'o progresie aritmetică, primul termen $=a$, raţia $=r$, numărul termenilor $=2n$.

Să se calculeze raportul A : B, unde A = suma primilor n termeni, iar B = suma ultimilor n termeni.

Caz particular

$$a=1\quad,\quad r=2\quad,\quad 2n=100.$$

Problema 3. Dacă a, b, c, d sunt patru numere în progresie geometrică, să se arate că

$$a^2 + d^2 > b^2 + c^2.$$

Problema 4. Să se discute rădăcinile ecuației

$$px^2 + (2 - 2p)\,x + p - 4 = 0$$

când parametrul p variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

Problema 5 facultativă. Polinomul $(x+y)^3 - x^3 - y^3$ este divizibil cu $3xy\,(x+y)$; dar dacă se înlocuește peste tot numărul 3 printr'un număr întreg și pozitiv?

Trigonometria. *Problema 1.* Intr'un triunghiu, unghiurile sunt proporționale cu numerele 3, 4, 5; cu ce numere sunt proporționale laturile triunghiului?

In alt triunghiu, laturile sunt proporționale cu numerele 3, 4, 5; cu ce numere sunt proporționale unghiurile triunghiului?

Problema 2. Să se discute rădăcinile ecuației trigonometrice

$$(p+1)\cos 2x + 2p^2 \sin x + 1 - 3p = 0$$

pentru diferitele valori ale parametrului p și să se calculeze valorile lui x când $p = 1{,}5$.

Problema 3 facultativă. Să se calculeze, într'un triunghiu oarecare, distanțele ortocentrului la laturi, în funcție de lungimile laturilor și tangentele trigonometrice ale unghiurilor.

Chimia. 1. Cunoscând formula acidului azotic și proprietățile chimice ale aluminiului să se scrie:

a) Formula azotatului de aluminiu.

b) Să se descrie în mod sumar elementele ce compun această substanță.

2. Despre benzen.

Zoologie. 1. Fiziologia tubului digestiv la om.

2. Ortoptere.

Botanică. 1. Gymnosperme.

2. Creșterea plantelor.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin séismique. Année 1936. Publié par G. DEMETRESCU.

Idem. Années 1937, 1938, 1939 et 1940. Publié par G. DEMETRESCU.

Idem. Années 1941 et 1942. Publié par G. DEMETRESCU et G. PETRESCU.

Revista Matematică din Timișoara. Vol. XXIV. Nr. 8. Octombrie 1944. I. V. MĂTIEȘ: Cuburi isofinale. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate și propuse.

Dr.-Ing. A. AVRAMESCU. Clasificarea decimală privind producţia şi distribuţia energiei electrice. (Extras din Buletinul A. P. D. E. Septembrie 1942 şi Ianuarie-Iunie 1943).

Dr.-Ing. A. AVRAMESCU. Redactarea unitară a articolelor tehnico-ştiinţifice. (Extras din Buletinul Centrului Român de Documentaţie, IV-1943, Nr. 1/4). Bucureşti. Tipografia *Remus Cioflec*, 1944.

DIVERSE

a) Redacţionale

Printre rezolvitorii problemei 5657, publicată la pag. 94 din numărul precedent, se adaogă D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi E. N. WEGENER.

b) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

N. ABRAMESCU. Sur les tangentes de DARBOUX d'une surface. (Extras din Annales Scientifiques de l'Université de Jassy. Tome XXVII, Année 1941. Iaşi, Inst. Grafic „Presa Bună)".

N. ABRAMESCU. Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană. (Extras din *Gazeta Matematică* Nr. 1—2, Vol. XLVI. Imprimerla Naţională, Bucureşti 1940).

CAIUS IACOB. Sur l'écoulement fluide produit par la rotation d'un biplan „en tandem" autour d'un axe situé dans son propre plan. (Extras din *Mathematica*, Vol. XIX-1943, Timişoara, Tipografia Românească).

Donate de D-l Prof. P. SERGESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4596. *Cunoscând muchiile unui tetraedru la care unul din vârfuri se proiectează în centrul cercului feţei opuse, să se calculeze unghiurile lui diedre. Aplicaţii.*

O. N. ŢINO.

Soluţie, dată de D-l I. ST. TEODORESCU.

Să arătăm, în primul rând, că *volumul tetraedrului este egal cu* $\frac{2}{3}$ *din produsul ariilor a două feţe înmulţit cu raportul dintre sinusul unghiului diedru al celor două feţe şi lungimea muchiei lui.*

Fie un tetraedrul oarecare ABCD; $\overline{DI}$ înălţimea vârfului D faţă de ABC; $\overline{IM}$ perpendiculara pe BC; V volumul tetraedrului. După teorema celor trei perpendiculare, dreapta DM este perpendiculară pe BC.

Plecând dela relaţia cunoscută

$$V = (\text{aria ABC}) \cdot \frac{\overline{DI}}{3}, \qquad (1)$$

şi observând că

$$\overline{DI} = \overline{DM} \sin \widehat{IMD} \quad , \quad \overline{DM} = \frac{2 \text{ aria DBC}}{\overline{BC}} \qquad (2)$$

deducem că:

$$V = (\text{aria ABC}) \cdot \frac{2}{3} \frac{\text{aria DBC}}{\overline{BC}} \sin \widehat{IMD}$$

sau încă

$$V = \frac{2}{3} (\text{aria ABC}) (\text{aria DBC}) \cdot \frac{\sin \widehat{IMD}}{\overline{BC}}. \qquad (3)$$

In cazul problemei noastre fiind cunoscute lungimile muchiilor, putem calcula ariile feţelor tetraedrului şi razele cercurilor circumscrise feţelor lui; deci piciorul înălţimii din D fiind centrul O al cercului ABC, înălţimea vârfului D poate fi calculată în funcţie de lungimile muchiilor. Avem, însemnând cu l lungimile muchiilor egale $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$ şi cu R raza cercului ABC, relaţiile

$$\overline{DO}^2 = \overline{DA}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 = l^2 - R^2 \qquad (4)$$

De altă parte M fiind mijlocul lui BC şi triunghiul BDC fiind isoscel, cu notaţile obişnuite avem

$$\overline{DM} = \frac{1}{2} \sqrt{4l^2 - a^2},$$

iar din triunghiul DMO avem

$$\sin \widehat{DMO} = \frac{\overline{DO}}{\overline{DM}} = 2 \sqrt{\frac{l^2 - R^2}{4l^2 - a^2}}. \qquad (5)$$

In acelaşi fel, însemnând cu N şi P respectiv mijloacele lui $\overline{AC}$ şi $\overline{AB}$ avem:

$$\sin \widehat{DNO} = \frac{\overline{DO}}{\overline{DN}} = 2 \sqrt{\frac{l^2 - R^2}{4l^2 - b^2}}; \quad \sin \widehat{DPO} = 2 \sqrt{\frac{l^2 - R^2}{4l^2 - c^2}}. \qquad (6)$$

Insemnând acum cu α, β, γ măsurile unghiurilor diedre cu muchiile DA, DB, DC şi aplicând formula (3) avem relaţiile:

$$(\text{aria DAC}) \cdot \frac{\sin \alpha}{DA} = (\text{aria CAB}) \cdot \frac{\sin \widehat{DPO}}{AB}$$

$$(\text{aria DBA}) \cdot \frac{\sin \beta}{DB} = (\text{aria ABC}) \cdot \frac{\sin \widehat{DMO}}{BC}$$

$$(\text{aria DCB}) \cdot \frac{\sin \gamma}{DC} = (\text{aria ABC}) \cdot \frac{\sin \widehat{DNO}}{CA}$$

sau încă:

$$\sin \alpha = 2\frac{l}{c} \cdot \frac{(\text{aria ABC})}{(\text{aria DAC})} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - R^2}{4l^2 - c^2}}$$

$$\sin \beta = 2\frac{l}{a} \cdot \frac{(\text{aria ABC})}{(\text{aria DBA})} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - R^2}{4l^2 - a^2}}$$

$$\sin \gamma = 2\frac{l}{b} \cdot \frac{(\text{aria ABC})}{(\text{aria DCB})} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - R^2}{4l^2 - b^2}}.$$

Aplicaţii. Dacă baza ABC a tetraedrului este un triunghiu echilateral, atunci $c = b = a$, iar $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, deci

$$\sin \widehat{DPO} = \sin \widehat{DNO} = \sin \widehat{DMO} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3l^2 - a^2}{4l^2 - a^2}},$$

iar

$$\sin \gamma = \sin \beta = \sin \alpha = \frac{2l\sqrt{3l^2 - a^2}}{4l^2 - a^2}$$

Caz particular al tetraedrului regulat: $l = a$.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4680. 1°. *Intr'un cub* ABCD A'B'C'D', *planul care trece prin mijloacele* M, N *ale muchiilor* AB, AD *şi prin extremitatea* A' *a muchiei* AA', *este tangent sferei înscrise cubului în centrul de greutate al triunghiului* A'MN.

2°. *Să se arate că proprietatea subsistă, când se înlocueşte cubul prin un romboedru.*

3°. *Să se deducă volumul solidului limitat de cub şi de cele 24 planuri definite ca la* 1°.

V. THÉBAULT.

Soluţie, dată de D-l ING. R. BARAS (Nevers, Franţa).

1°. Fie O centrul cubului, Ω, Ω' centrele feţelor ABCD, A'B'C'D' şi μ intersecţia lui MN cu AC. Din construcţia punctelor M şi N se deduce imediat că μ este mijlocul lui AΩ, aşa că

$$A\mu = \mu\Omega = \frac{A\Omega}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

a fiind latura cubului dat.

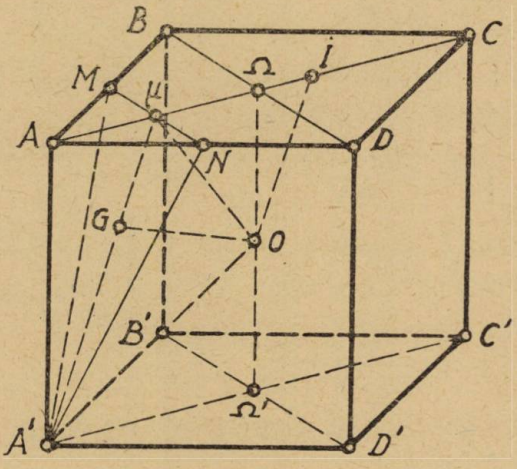


Fig. 1.

Triunghiurile dreptunghice A'AM, A'AN având ipotenuzele egale, sunt egale şi deci

$$A'M = A'N$$

de unde rezultă că A'μ ⊥ MN ca mediană în triunghiul isoscel MA'N. Planul A'Aμ ΩΩ'A' fiind perpendicular pe feţelor ABCD,

A'B'C'D' şi conţinând dreaptă A'μ, este perpendicular pe MN şi deci pe planul A'MN. Urmează că perpendiculara din O pe planul A'MN este conţinută în planul AΩΩ'A' şi-şi are piciorul într'un punct G pe A'μ, care se confundă cu centrul de greutate al triunghiului A'MN, după cum rezultă din cele ce urmează.

Din triunghiurile dreptunghice A'Aμ, A'Ω'O, OΩμ, avem succesiv

$$\overline{A'\mu} = \sqrt{\overline{A'A}^2 + \overline{A\mu}^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \qquad (1)$$

$$\overline{A'O} = \sqrt{\overline{A'\Omega}^2 + \overline{\Omega'O}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

$$\overline{O\mu} = \sqrt{\overline{O\Omega} + \overline{\Omega\mu}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) se deduce

$$\overline{A'O}^2 + \overline{O\mu}^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{6a^2}{16} = \frac{9a^2}{8} = \overline{A'\mu}^2$$

ceea ce arată că triunghiul A'Oμ este dreptunghic în O. Înălţimea OG a acestui triunghiu este dată de

$$OG = \frac{A'O - O\mu}{A'\mu} = \frac{a}{2} = O\Omega = O\Omega. \qquad (4)$$

Deci *sfera de centru* O *şi rază* OΩ, *adică sfera înscrisă în cub, este tangentă în* G *planului* A'MN. De aici rezultă că

$$A'G = A'\Omega' = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (5)$$

Din triunghiul OGμ, dreptunghic în G, şi din relaţiile (3) şi (4), scoatem

$$G\mu = \sqrt{\overline{O\mu}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \qquad (6)$$

Din (5) şi (6) se deduce

$$A'G = 2G\mu$$

ceea ce arată că G *este centrul de greutate al triunghiului* A'MN.

Se poate arăta şi altfel că sfera înscrisă în cub este tangentă planului A'MN. Fie, pentru aceasta, I intersecţia lui AC cu paralela din O la A'μ. Dreapta OI este în planul diagonal A'ACC'Ω' şi fiindcă O este mijlocul lui A'C, punctul I va fi mijlocul lui μC, aşa că avem

$$\mu I = \frac{\mu C}{2} = \frac{AC - A\mu}{2} = \frac{a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}.$$

Pe de altă parte volumele tetraedelor OA'MN, IA'MN sunt evident echivalente, având aceeaşi bază şi vârfurile O, I pe o paralelă la bază. Valoarea acestui volum este

$$V = \frac{1}{3} A'A \times \text{Sup. } IMN = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3}{16}.$$

Cum pe de altă parte

$$\text{Sup. } A'MN = \frac{1}{2} A'\mu \,.\, MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2}{8}$$

rezultă că înălţimea OG a tetraedrului OA'MN, are lungimea dată de

$$\overline{OG} = \frac{3V}{\text{Sup. } A'MN} = \frac{\frac{3a^3}{16}}{\frac{3a^2}{8}} = \frac{a}{2} = O\Omega = O\Omega'$$

adică egală cu raza sferei înscrisă în cub.

2°. Proprietatea dela 2° *nu este adevărată*, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Fie romboedrul ABCDA'B'C'D', ale cărui feţe sunt romburi cu latură a şi cu diagonala mare egală cu $2l$, aşa încât

$$a\sqrt{2} \leqslant 2l \leqslant 2a.$$

Notăm: O centrul de simetrie al romboedrului; Ω şi Ω' centrele feţelor ABCD şi A'B'C'D'; A' şi C extremităţile celei mai lungi diagonale a romboedrului; M, N, P, Q, M', N', P', Q', R, S, T, U mijloacele respective ale muchiilor AB, AD, BC, CD, A'B', A'D', B'C', C'D', AA', BB', CC', DD'; μ intersecţia lui MN cu AC.

La romboedru avem de examinat mai multe cazuri, care dau rezultate diferite.

a) *Cazul planului* A'MN *şi analoagele lui.*

μ este evident la mijlocul lui AΩ aşa că

$$A\mu = \mu\Omega = \frac{A\Omega}{2} = \frac{l}{2}.$$

Triunghiurile A'AM şi A'AN având unghiurile din A şi laturile adiacente egale, sunt egale, deci

$$A'M = A'N$$

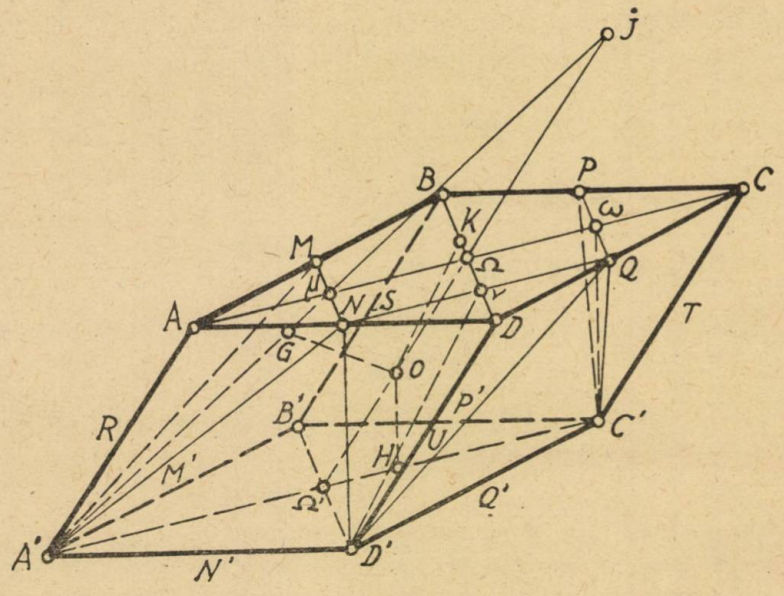


Fig. 2.

de unde rezultă că în triunghiul isoscel A'MN, mediana A'μ este perpendiculară pe MN.

Planul AμA' este deci planul median al segmentului de dreaptă MN; dar acest plan se confundă cu planul de simetrie AΩCC'ΩA', care este perpendicular pe feţele ABCD şi A'B'C'D', prin urmare planul AμA' este perpendicular pe dreapta MN şi deci pe planul A'MN, iar de aici rezultă că perpendiculara din O pe planul A'MN, este conţinută în planul OμA' şi că-şi are piciorul într'un punct G pe A'μ, intersecţia planurilor A'MN şi OμA'.

Aplicând teorema medianelor triunghiului A'AC, avem

$$2\overline{A'N}^2 + 2\overline{AN}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'D}^2$$

$$\therefore \quad \overline{A'N}^2 = \frac{\overline{AA'}}{2} - \overline{A'N}^2 + \frac{\overline{A'D}^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} + 2l^2 .$$

Din triunghiul dreptunghic A'μN se scoate

$$\overline{\mu N} = \frac{\Omega D}{2} = \frac{\sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{A\Omega}^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2}$$

$$\overline{A'\mu} = \sqrt{\overline{A'N}^2 - \overline{\mu N}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} + 2l^2 - \frac{a^2 - l^2}{4}} = \frac{3l}{2} .$$

Dreapta A'μ taie pe Ω'Ω în J, simetricul lui Ω' față de Ω, deci

$$A'J = 2A'\mu = 3l$$

așa că avem

$$\frac{A'J}{A'\Omega'} = \frac{3l}{l} = 3 = \frac{OJ}{\Omega'O'}$$

ceea ce arată că A'O este bisectoarea unghiului Ω'A'J. Prin urmare dacă H este proiecția lui O pe A'Ω', atunci

$$\overline{OH} = \overline{OG} .$$

Dar planul A'AμΩCC'Ω' fiind planul mediator al segmentelor MN și B'D' și fiind perpendicular pe planul A'B'C'D', dreapta OH este perpendiculară pe acest din urmă plan. Distanțele lui O la planurile A'MN și A'B'C'D' fiind egale, rezultă că *sfera înscrisă în romboedru este tangentă planului* A'MN.

In triunghiul A'Ω'J, dreapta A'O fiind bisectoare, avem

$$\overline{A'O}^2 = A'\Omega' \cdot A'J - \Omega'O \cdot OJ = l \cdot 3l - \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{12l^2 - 3a^2}{4} \qquad (7)$$

apoi în triunghiul OA'Ω' avem

$$\overline{O\Omega'}^2 = \overline{A'O}^2 + \overline{A'\Omega'}^2 - 2A'H \cdot A'\Omega'$$

$$\therefore \quad A'H = AG = \frac{\overline{A'O}^2 + \overline{A'\Omega'}^2 - \overline{O\Omega'}^2}{2A'\Omega'} = \frac{4l^2 - a^2}{2l} \qquad (8)$$

relație care, împreună cu cea care dă pe A'μ, definește poziția lui G pe A'μ și anume

$$\frac{A'G}{A'\mu} = \frac{4l^2 - a^2}{3l^2}$$

de unde se vede că G *nu poate fi centrul de greutate al triunghiului* A'MN decât dacă

$$\frac{4l^2 - a^2}{3l^2} = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad 2l^2 = a^2$$

ceea ce nu se poate în cazul romboedrului.

Aceste proprietăți sunt atât ale planurilor A'UQ', A'P'S analoage cu A'MN cât și ale planurilor CP'Q', CSM, CNU simetrice precedentelor față de O.

b) *Cazul planului* D'NQ *și analoagele lui.* Fie ν mijlocul lui DΩ. Dreapta NQ trece prin ν și avem

$$D\nu = \nu\Omega = \frac{D\Omega}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2}. \qquad (9)$$

Paralela dusă din O la D'ν, în planul D'DBB', taie pe DB în K așa în cât

$$\frac{BK}{B\nu} = \frac{BO}{BD'} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad K\nu = \frac{B\nu}{2} = \frac{BD - D\nu}{2} = \frac{2\sqrt{a^2 - l^2} - \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{a^2 - l^2}.$$

Tetraedrele OD'NQ și KD'NQ având o bază comună și linia vârfurilor paralelă cu baza, au același volum V_2, dat de

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 20H \,.\, \text{Sup. } KNQ = \frac{1}{3} OH \,.\, K\nu \,.\, NQ = \frac{l\sqrt{a^2 - l^2}}{4} \cdot OH$$

dacă ținem seamă de valorile găsite anterior. Triunghiul dreptunghic A'HO și relațiile (7) și (8) ne dau

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{A'O}^2 - \overline{A'H}^2} = \frac{\sqrt{(a^2 - l^2)(4l^2 - a^2)}}{2l} \qquad (10)$$

așa că în definitiv avem

$$V_2 = \frac{a^2 - l^2}{8}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Înălțimea, corespunzătoare laturii NQ, în triunghiul D'NQ este cuprinsă într'un plan trecând prin D' și perpendicular pe fețele ABCD și A'B'C'D'. Luând intersecțiile acelui plan cu cele două fețe și cu paralela din D la NQ se vede ușor că înălțimea considerată este

$$\sqrt{4\,\overline{OH}^2 + \overline{Dv}^2},$$

sau ținând seamă de (9) și (10)

$$\sqrt{4\,\overline{OH}^2 + \overline{Dv}^2} = \frac{\sqrt{(a^2 - l^2)\,(17l^2 - 4a^2)}}{2l}.$$

Deci suprafața triunghiului D'NQ este dată de

$$\text{Sup. D'NQ} = \frac{1}{2}\,NQ\,\frac{\sqrt{(a^2 - l^2)\,(17l^2 - 4a^2)}}{2l} = \frac{\sqrt{(a^2 - l^2)\,(17l^2 - 4a^2)}}{4}.$$

Notând acuma cu ρ_1 distanța lui O la planul D'NQ avem

$$\rho_1 = \frac{3V_2}{\text{Sup. D'NQ}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(a^2 - l^2)\,(4l^2 - a^2)}{17l^2 - 4a^2}}$$

ceea ce înseamnă că planul D'NQ este tangent unei sfere cu centrul în O și cu raza ρ_1. Dar planurile BP'M', DMR, C'UN' sunt simetricele planurilor D'NQ, B'Q'T, ASP față de O. Apoi B'MP, DQ'N' sunt simetricele planurilor D'NQ, BQ'M' față de A'ACC'; planurile AUQ, C'SM' sunt simetricele planurilor B'Q'T, DMR față de A'D'CB; planurile D'P'T, BNR sunt simetricele planurilor ASP, CUN' față de A'B'CD, iar O fiind comun planurilor de simetrie A'ACC', A'D'CB, A'B'CD distanțele lui O la planurile B'MP, DQ'N', AUQ, C'SM', D'P'T, BNR sunt egale cu ρ_1.

Rezultă deci că *următoarele 12 planuri* D NQ, B'QT, ASP, BP'M', DMR, CUN', B'MP, DQ'N', AUQ, C'SM, D'P'T, BNR. *sunt tangente sferei de rază* ρ_1 *și cu centrul în* O.

e) *Cazul planului* C'PQ *și analoagele lui.* Fie *w* intersecția lui PQ cu ΩC. Se arată ca la cazul *a*) că C'*w* este perpendiculară pe PQ și că planul C'PQ este perpendicular pe PQ. Apoi se deduce succesiv

$$\overline{C'Q}^2 = \frac{9a^2}{4} - 2l^2 \quad ; \quad \overline{wQ} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2} \quad ; \quad \overline{C'w} = \frac{\sqrt{8a^2 - 7l^2}}{2}.$$

Avem

Sup. O*w*C'=Sup. Ω'ΩCC'—Sup. OΩ*w*—Sup. C'*w*C—Sup. OC'Ω'.

Dar avem pe figură

$$\text{Sup. } \Omega'\Omega CC' = 2\ OH\,.\,\Omega'C' = 2l\,OH$$

$$\text{Sup. } O\Omega w = \frac{1}{2}\ OH\,.\,\Omega w = \frac{1}{4}\,l\,OH$$

$$\text{Sup. } C'wC = \frac{1}{2}\ OH\,.\,wC = \frac{1}{2}\,l\,OH$$

$$\text{Sup. } OC'\Omega' = \frac{1}{2}\,OH\,.\,C'\Omega' = \frac{1}{2}\,l\,OH$$

$$\therefore \qquad \text{Sup. } OwC' = \frac{3}{4}\,lHO = \frac{3}{4}\sqrt{(a^2 - l^2)\,(4l^2 - a^2)}\,.$$

Prin urmare, dacă F este proiecția lui O pe planul C'PQ, deci pe C'w, avem

$$\rho_2 = OF = \frac{2\ \text{Sup. } OwC'}{C'w} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{(a^2 - l^2)\,(4l^2 - a^2)}{8a^2 - 7l^2}}\,.$$

Aplicând teorema medianelor triunghiului A'OC' și ținând seamă de valorile lungimilor, calculate până aici, găsim

$$\overline{OC'}^2 = \frac{5a^2}{4} - l^2$$

$$\overline{C'F}^2 = \overline{C'O}^2 - \overline{OF}^2 = \frac{(7a^2 - 8l^2)^2}{4\,(8a^2 - 7l^2)}$$

$$\frac{C'F}{C'w} = \frac{7a^2 - 8l^2}{8a^2 - 7l^2}\,. \qquad (11)$$

Conchidem că *planul* C'PQ *este tangent sferei cu centrul în* O *și de rază* ρ_2, *punctul de tangență* F *fiind pe mediana* C'w, pe care o împarte în *raportul dat de* (11).

Punctul F este centrul de greutate al triunghiului C'PQ numai când raportul (11) este egal cu $\frac{2}{3}$, adică $a^2 = 2l^2$ ceea ce *nu se poate în cazul romboedrului.*

De proprietățile planului C'PQ se bucură și planurile BQT, DTP, AN'M', D'M'R și B'RN'.

3°. Fie M, N, P, Q, M', N', P', Q', R, S, T și U mijloacele respective ale muchiilor AB, AC, BC, CD, A'B', A'C', B'C', C'D', AA', BB', CC' și DD' ale cubului ABCDA'B'C'D'.

Faţa ADD'A este tăiată de planurile AM'N', A'MN, DMR, AUQ, D'NQ, A'UQ', D'RM' după dreptele AN', A'N, DR, AU, D'N, DN', A'U, D'R, care formează octogonul $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \varepsilon_1 \varphi_1 \chi_1 \lambda_1$. Din cauza simetriei construcţiilor acest octogon este regulat şi este circumscris cercului cu centru în centrul Ω_1 al patratului A'ADD'.

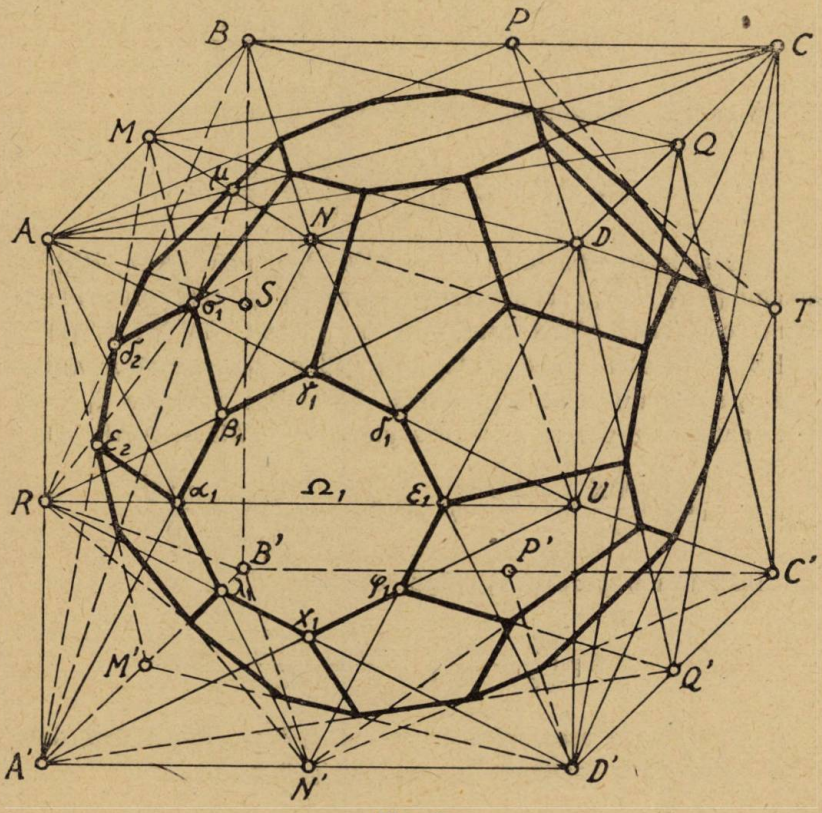


Fig. 3.

Pentru găsirea apotemei acestui octogon, observăm că suprafaţa triunghiului $A'N\Omega_1$ este

$$\frac{1}{2} N\Omega_1 \times A'N' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} A'N_x \quad \text{Apotema.}$$

Dar A'N se cunoaşte de la 1°, aşa că deducem că apotema octogonului are valoarea

$$A_p = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

Observăm apoi pe figură că β_1 este centrul de greutate al triunghiului A'AD iar α_1 este centrul dreptunghiului A'ANN', deci

$$A'\beta_1 = \frac{2}{3} A'N \quad \text{şi} \quad A\alpha_1 = \frac{A'N}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{\alpha_1\beta_1} = A'\beta_1 - A'\alpha_1 = \frac{A'N}{6} = \frac{a\sqrt{5}}{12}.$$

Suprafaţa octogouului considerat va fi deci

$$\Sigma_1 = 8 \times \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{5}}{10} \times \frac{a\sqrt{5}}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

Fie ε_2 intersecţia lui AM' cu A'M, ϑ_2 punctul (A'M, BR), σ_1 punctul ($N\vartheta_2$, MB_1). Din aceste construcţii şi cele precendente rezultă că planul A'MN este tăiat de planele AM'N', A'ADD', A'ABB', DMR, BNR după pentagonul $\alpha_1\beta_1\sigma_1\vartheta_2\varepsilon_2$ ale cărui vârfuri α_1 şi ε_2 sunt mijloacele segmentelor A'N A'M; vârfurile β_1 şi ϑ_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor A'AD şi A'AB. Deci

$$\alpha_1\varepsilon_2 = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{şi} \quad \beta_1\vartheta_2 = \frac{2}{3} MN = \frac{a\sqrt{2}}{8}.$$

Inălţimea trapezului $\alpha_1\varepsilon_2\vartheta_2\beta_1$ este

$$A'\mu\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{A'\mu}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{8}.$$

Triunghiurile asemeni şi isoscelele $\rho_1\vartheta_2\sigma_1$, $N\sigma_1M$ dau, dacă se înseamnă cu x înălţimea triunghiului $\rho_1\vartheta_2\sigma_1$

$$\frac{x}{\sigma_1\mu} = \frac{\beta_1\vartheta_2}{MN} \quad \therefore \quad \frac{x}{x+\sigma_1\mu} = \frac{\beta_1\vartheta_2}{\beta_1\vartheta_2 + MN}$$

şi ţinând seamă că $x + \sigma_1\mu$ este o treime din $A'\mu$, se deduce

$$x = \frac{A\mu}{3} \cdot \frac{\beta_1\vartheta_2}{\beta_1\vartheta_2 + MN} = \frac{\frac{3a}{2\sqrt{2}}}{3} \cdot \frac{\frac{2MN}{3}}{\frac{2}{3}MN + MN} = \frac{a\sqrt{2}}{10}.$$

Acum avem toate elementele pentru a calcula suprafaţa pentagonului $\alpha_1\beta_1\sigma_1\vartheta_2\varepsilon_2$. Această suprafaţă este

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1\varepsilon_2 + \beta_1\vartheta_2)\frac{A'\mu}{6} + \frac{1}{2}\beta_1\vartheta_2 \times x$$

sau înlocuind lnngimile în funcţia de a:

$$\Sigma_2 = \frac{17a^2}{160}.$$

Examinând figura, observăm că poliedrul, al cărui volum se cere are 6 feţe octogoane regulate ca $\alpha_1\beta_1\gamma_1\vartheta_1\varepsilon_1\varphi_1\chi_1\lambda_1$ aşezate pe feţele cubului şi 24 feţe pentagoane egale cu $\alpha_1\beta_1\sigma_1\vartheta_2\varepsilon_2$, aşezate pe planuri analoage cu A'MN, planuri care am văzut la 1° că sunt tangente sferei înscrisă în cub. Prin urmare volumul acestui poliedru este

$$6 \times \frac{1}{3} \times \frac{a}{2} \times \Sigma_1 + 24 \times \frac{1}{3} \times \frac{a}{2}\Sigma_2 = \frac{71a^3}{120}.$$

Notă. 1°. Problema a fost bine rezolvată şi de D-l S-Lt. M. AL. VASILESCU-ŞTABU. D-sa a *demonstrat foarte bine* că punctul 2°, aşa cum era enunţul iniţial, nu este adevărat, dar nu a căutat şi proprietăţile corespunzătoare ale romboedrului.

2°. La punctul 2° al enunţului, D-l R. BARAS a găsit trei sfere concentrice la care diferitele planuri, construite ca în enunţ, sunt tangente. Intre razele acelor 3 sfere există o relaţiune interesantă, care se poate deduce asociind convenabil valorile lor. Iată acea relaţie, uşor de verificat, ţinând seamă de cele stabilite la punctul 2° al soluţiei:

$$\frac{3}{\rho^2} = \frac{2}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}.$$

Pentru cazul când romboedrul se confundă cu un cub, adică când $2l = a\sqrt{2}$, găsim

$$\rho = \rho_1 = \rho_2 = \frac{a}{2}$$

ceea ce este o verificare indirectă a proprietăţii cubului.

3°. Proprietatea dela 1° a cubului se demonstrează mult mai simplu pe calea următoare. Planul A'ACC'A' conţine evident pe μ şi Ω. Observăm că

$$AC = a\sqrt{2} \quad \therefore \quad C\mu = \frac{3a\sqrt{2}}{4},$$

iar triunghiul dreptunghic A'Aμ dă

$$A'\mu = \frac{3a\sqrt{2}}{4} = C\mu.$$

Deci triunghiul A'μC este isoscel şi mediana μO este bisectoarea unghiului μ. Rezultă că distanţele OΩ şi OG ale lui O la AC şi A'μ sunt egale şi deci

$$G\mu = \mu\Omega = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{3} A'\mu$$

adică G este centrul de greutate al triunghiului A'MN. Apoi se vede, din chiar construcţie că planul A'AμO este perpendicular pe planul A'MN. Acestea demonstrează proprietatea.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5431. *Fie punctele* M *şi* M' *pe cercul* O, *circumscris triunghiului* ABC *şi* Δ, Δ' *dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* M, M' *faţă de triunghiul* ABC. *Fie încă* M_a, M_b, M_c *şi* M_a, M'_b, M'_c *proiecţiile punctelor* M *şi* M' *respectiv pe laturile* BC, CA, AB. *Dacă* N *este intersecţia dreptelor* Δ, Δ' *şi dacă punctul* A *este mobil pe cercul* O, *punctele* B, C, M, M' *fiind fixe, să se arate că:*

1°. *Locurile punctelor* M_b, M'_b, M_c, M'_c, N *sunt cinci cercuri* (M_b); (M'_b); (M_c); (M'_c); (N).

2°. *Cercurile* (M_b), (M'_b), (N) *trec printr'un punct* P_b, *iar cercurile* (M_c), (M'_c), (N) *trec printr'un punct* P_c.

3°. *Punctele* P_b *şi* P_c *se găsesc pe dreapta* MM'.

HORIA M. BODNĂRESCU.

1°. Punctele M_b, M'_b, M_c, M'_c descriu cercuri care au MC, M'C, MB şi M'B ca diametre.

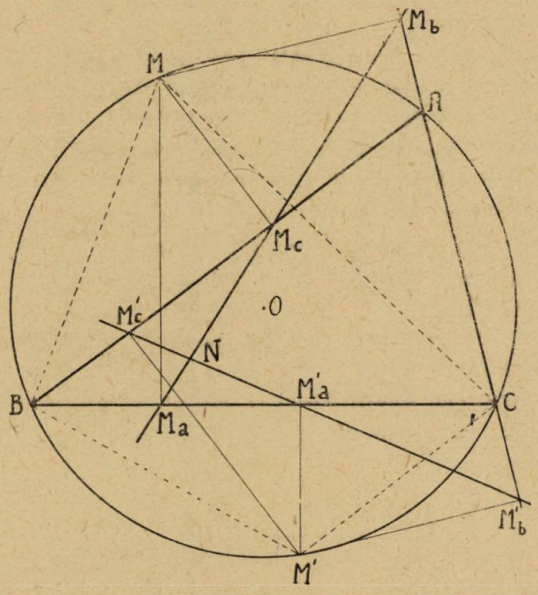
Se observă că punctele M_a şi M'_a sunt fixe, ca proiecţii ale punctelor M şi M', fixe, pe dreapta BC, fixă. $\sphericalangle M_a N M'_a$ este constant. Aceasta se vede prin faptul că el este exterior triunghiului $M_b N M'_b$ la care $\sphericalangle CM_b N = CMM_a = \text{const.}$ şi

$$\sphericalangle NM'_b M_b = \sphericalangle CM'M_a = \text{const.}$$

Deci locul lui N este un cerc ce trece prin M_a şi M'_a.

2°. Cercurile (M_b), (M'_b) şi (N) trec prin punctul P_b care este punctul lui MIQUEL al patrulaterului $NM'_a CM_b$.

Analog (M_c), (M_c') şi (N) trec prin punctul P_c care este punctul lui MIQUEL al patrulaterului $NM_a\,BM_c'$.



3°. Punctele M şi M' sunt diametral opuse lui C în cercurile (M_b) şi (M_b') care au pe C comun, deci dreapta MM' va trece prin celălalt punct comun al cercurilor, care este P_c. Analog se arată că dreapta MM' trece şi prin P_b.

DUMITRU VASILIU
clasa a VI-a liceul militar, Iaşi.

Foarte bune soluţii s'au primit dela D-nii: PAUL P. DRĂGHICESCU (liceul militar, Iaşi), MIRCEA D. POPA (Şc. ofiţeri Art.) S-LT. CONSTANTIN PANTELIMON (Reg. 9 A. A., Ploeşti), MIRCEA C. NICULESCU (bacalaureat, Bucureşti), NICOLAE SOTIRESCU (clasa a VIII-a liceul militar, Timişoara).

O bună soluţie dela D-l OCT. E. GHEORGHIU (Bucureşti), dar n'a demonstrat că N descrie un cerc.

Din celelalte soluţii desprindem câteva feluri de a privi unele puncte ale problemei, diferite de cele cuprinse în soluţia de mai sus.

La punctul 1°. a) Unghiul $M_a NM'_a$ format de dreptele lui SIMSON ale punctelor M, M' are ca măsură $\frac{1}{2}$ arc MM' aşa că e constant. Rezultă cu N descrie un cerc. (MIRCEA D. POPA, CONSTANTIN PANTELIMON, MIRCEA NICULESCU, N. SOTIRESCU).

b) N este ortopolul dreptei MM' faţă de triunghiul ABC, iar locul ortopolului unei drepte fixe faţă de triunghiul ABC, când BC e fixă, iar unghiul A constant, este un cerc (P. P. DRĂGHICESCU).

La punctul 2°. In general s'a demonstrat prin relaţii unghiulare. D-nii: N. SOTIRESCU şi OCT. GHEORGHIU privesc astfel chestiunea: P_b aparţine şi cercului (M_b) şi lui (M'_b) deci pentru o anumită poziţie a lui A în acest punct se confundă M_b cu M'_b şi atunci prin P_b trece şi Δ şi Δ'. Cum intersecţia lor aparţine cercului (N) rezultă că acest cerc trece prin P_b.

La fel pentru P_c.

La punctul 3°. Punctele P_b, P_c sunt respectiv proiecţiile lui C şi B pe MM' (aproape toţi rezolvitorii).

Observaţiune. Din soluţia D-lui D. VASILIU se mai desprinde că cercurile variabile $NM_b M'_b$ şi $NM_c M'_c$ trec prin punctele fixe P_b, P_c conform teoremei lui MIQUEL.

G. D. S.

PROBLEMA 5533. *Fie o piramidă cu vârful* S *şi baza un exagon plan oarecare* ABCDEF. *In ce condiţii pot fi tăiate muchiile* SA, SB,... SF *ale acestei piramide, cu un plan pentru ca secţiunea făcută în piramidă să fie un exagon cu laturile opuse paralele.*

ADRIAN GHEORGHIU.

Soluţia I. Dată de D-nii: RADU P. VOINEA (bacalaureat, Craiova) şi MARIN GH. POPESCU (clasa a VII-a a liceului Brătianu, Piteşti).

Fie A'B'C'D'E'F' exagonul cu laturile opuse paralele, obţinut prin intersectarea cu un anumit plan, a piramidei date S. ABCDEF.

Un astfel de exagon e inscriptibil într'o conică conform reciprocei teoremei lui PASCAL, *dreapta lui* PASCAL fiind în acest caz dreapta dela infinit a planului exagonului.

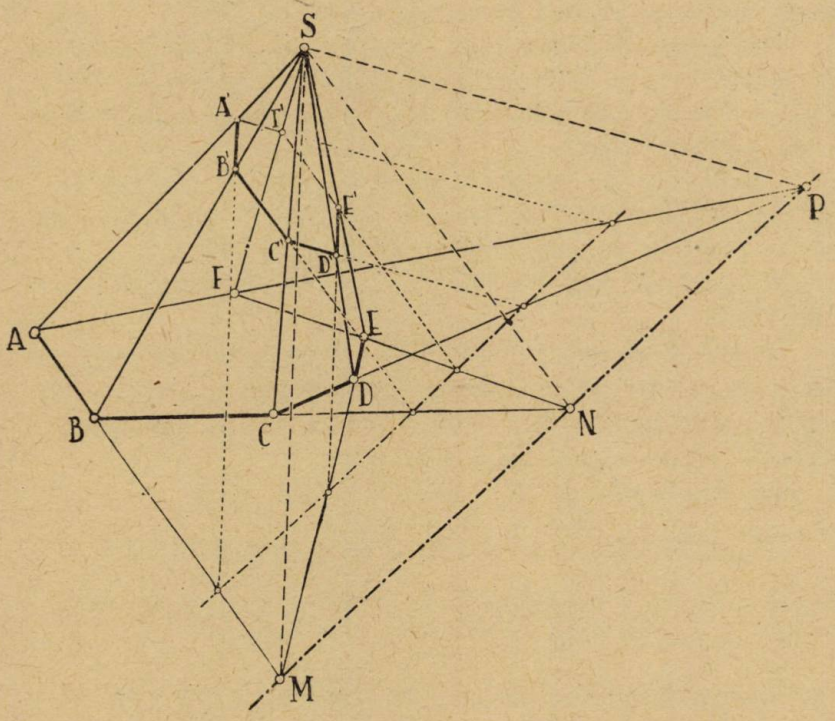
Rezultă că muchiile SA, SB,... SF sunt *generatoarele unui con de gradul II* şi prin urmare şi exagonul plan de bază, ABCDEF

este inscriptibil într'o conică, adică conform teoremei lui PASCAL, directe, punctele:

$$M \equiv (AB, DE) \quad , \quad N \equiv (BC, EF) \quad , \quad P \equiv (CD, FA)$$

sunt colineare.

Cele două exagoane sunt deci într'o perspectivă în raport cu punctul de vedere S şi astfel încât dreapta lui PASCAL MNL a exagonului ABCDEF se corespunde cu dreapta dela infinit a planului A'B'C'D'E'F', rezultă deci că acest plan e paralel cu planul vizual S.MNP.



Aşa dar, condiţia cerută este ca exagonul de bază al piramidei să fie inscriptibil într'o conică şi atunci, orice secţiune printr'un plan paralel cu planul determinat de vârful piramidei şi dreapta lui PASCAL a exagonului de bază, răspunde enunţului problemei.

(Rezolvitorii au găsit bine condiţia, dar paralelismul planelor de secţiune cu planul S. MNP nu l-au dovedit).

Soluția II dată de D-nii: AUREL N. POPA (liceul militar Iași, clasa a VIII-a) și D. GH. VASILIU (liceul militar Iași, clasa a VI-a).

Se știe că un plan paralel cu intersecția a două plane, taie aceste plane după două drepte paralele cu intersecția.

Fie M intersecția laturilor opuse AB și DE, în exagonul ABCDEF. Dreapta SM' este intersecția fețelor SAB și SDE ale piramidei S.ABCDEF, deci un plan paralel la SM taie aceste două fețe după drepte paralele. Dacă N, P sunt puncte analoage, problema revine la a duce un plan paralel în același timp cu dreptele SM, SN, SP, și care să taie piramida după un exagon cu laturile opuse paralele și paralele respectiv cu SM, SN, SP.

Dar pentru a putea duce acest plan de secțiune paralel la *trei* drepte ce trec printr'un punct, *trebue ca aceste trei drepte să fie coplanare*, adică în planul bazei piramidei punctele M, N, P să fie colineare. Adică:

Condiția de posibilitate a problemei este ca exagonul ABC DEF să fie inscriptibil într'o conică, iar soluțiile problemei sunt date de plane de secțiune paralele cu planul S . MNP.

Soluția III dată de D-nul P. P. DRĂGHICESCU (liceul militar Iași).

Se știe că secțiunea făcută într'o piramidă cu baza un patrulater oarecare este un paralelogram, dacă planul cu care s'a făcut secțiunea este paralel cu planul format de vârful piramidei și diagonala a treia a patrulaterului de bază.

Fie intersecțiile:

$$M \equiv (AB, DE) \quad , \quad N \equiv (BC, EF) \quad , \quad P \equiv (CD, FA)$$

și fie P_1, P_2, P_3 patrulaterele ce se formează cu câte două perechi de laturi opuse ale exagonului ABCDEF și anume:

$$P_1 \equiv (AB, DE, BC, EF) \quad , \quad P_2 \equiv (BC, EF, CD, FA),$$

$$P_3 \equiv (CD, FA, AB, DE)$$

rezultă că MN este diagonala a treia a patrulaterului P_1, NP a patrulaterului P_2 și PM a patrulaterului P_2.

Pentru ca secțiunea făcută cu un plan T prin piramida (S, ABCDEF) să fie un exagon cu laturile opuse paralele, trebue ca secțiunile planului T cu fiecare din piramidele (S, P_2), (S, P_2),

(S, P_3) să fie un paralelogram, adică conform teoremei cunoscute citate la început, planul T trebue să fie paralel cu fiecare din planele (S, MN), (S, MP), (S, PM).

Rezultă imediat condiția de posibilitate a problemei: planele (S, MN), (S, NP), (S, PM) trebue să se confunde într'un singur plan T_S, adică pe dreapta de intersecție a acestora.

Deci: *Secțiunea făcută cu un plan într'o piramidă cu baza un exagon, este un exagon cu laturile opuse paralele, dacă exagonul de bază este inscriptibil într'o conică, iar planul de secțiune este paralel cu planul determinat de vârful piramidei și dreapta lui* PASCAL *a exagonului de bază.*

A. G.

PROBLEMA 5540. *Pe un plan înclinat cu unghiul* α *față de orizontală, se află așezată o bară omogenă* AB *de lungime* 2*l*, *de greutate* G, *care este în contact cu planul în cele două capete ale sale prin 2 picioruțe fără greutate, punctul cel mai de jos* A *fiind articulat fix de plan.*

Ținând seama de coeficientul de frecare μ *între picioruțul* B *și planul înclinat, să se determine:*

1. *Regiunea în care bara va fi în echilibru.*

2. *Dând barei aflată în poziția limită de echilibru o vitesă unghiulară inițială* ω_0, *care este vitesa unghiulară în momentul trecerii prin poziția ei așezată pe linia de cea mai mare pantă?*

GABRIELA ȚIȚEICA.

Soluție dată de D-nii: EFTIMIE CRISTEA (Politechnica Buc.) și C. BAKONYI (Politehnica Timișoara).

Greutatea G a barei aplicată în mijlocul ei, se descompune în două componente:

G $\sin\alpha$ în planul înclinat pe linia de cea mai mare pantă.

C $\cos\alpha$ normală la planul înclinat.

Presupunând bara deplasată până în poziția ei care face unghiul θ_0 maxim cu linia de cea mai mare pantă, G $\sin\alpha$ se va descompune în plan în componentele G $\sin\alpha$ $\sin\theta^0$ perpendiculară pe bară la mijlocul ei, și G $\sin\alpha$ $\cos\theta_0$ situată pe bară.

In capătul B vom avea o forță de sprijin N normală la planul înclinat și o forță de frecare μN perpendiculară pe bară în plan. E evident că $N = \frac{G \cos\alpha}{2}$ căci componenta lui G normală la plan e la jumătatea barei AB.

Luând momentele acestor forțe față de punctul de articulație A, căpătăm

$$G \sin\alpha \sin\theta_0 \; l = \mu N \cdot 2l = \mu G \cos\alpha \cdot l$$

de unde

$$\sin\theta_0 = \mu \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ceea ce ne dă regiunea în care bara e în echilibru

$$-\theta_0 \leqslant \theta_0 \leqslant \theta_0 .$$

Studiul mișcării. Dând barei o iuțeală inițială ω_0, ea va începe să se rotească în jurul lui A. Asupra barei lucrează un cuplu de moment:

$$\mathfrak{M} = lG \; (\sin\alpha \sin\theta - \mu \cos\alpha)$$

Din relația fundamentală

$$\mathfrak{M} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

punând $\quad k_1 = \frac{lG}{I \sin\alpha} \; ; \quad k_2 = \frac{\mu l G \cos\alpha}{I}$

unde I = momentul de inerție al barei în raport cu A, avem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - k_1 \sin\theta + k_2 = 0.$$

Inmulțind cu $\frac{d\theta}{dt} dt$ și integrând, avem, ținând seama că $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

$$\frac{\omega^2}{2} + k_1 \cos\theta + k_2\theta = k_3$$

k_3 fiind o constantă de integrare pe care o determinăm cu ajutorul condițiilor inițiale: $\theta = \theta_0$, $\omega = \omega_0$

$$k_3 = \frac{\omega^2}{2} + k_1 \cos\theta_0 + k_2 \theta_0$$

de unde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2k_1 (\cos\theta_0 - \cos\theta) + 2k_2 (\theta_0 - \theta)}.$$

Pentru $\theta = \pi$ avem iuțeala cerută

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 + 2k_1 (\cos\theta_0 + 1) + 2k_2 (\theta_0 - \pi)}$$

G. Ț.

PROBLEMA 5684. *Să se rezolve ecuația*

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

știind că are ca rădăcini pe

1°. $m + n$; $m - n$; mn ; $\frac{m}{n}$

2°. $m + n$; $m - n$; mn ; $\frac{n}{m}$,

m *și* n *fiind numere diferite și diferite de zero.*

GH. BASACOV.

Soluție, dată de D-nii: SLT. C. PANTELIMON, P. P. DRĂGHICESCU și E. N. WEGENER.

1°. Din relația

$$\Sigma x_i = 2m + mn + \frac{m}{n} = \frac{m}{n}(n+1)^2 = 0$$

se scoate $n = -1$, căci m și $n \neq 0$. Cele patru rădăcini sunt

$$x_1 = m - 1 \quad ; \quad x_2 = m + 1 \quad ; \quad x_3 = -m \quad ; \quad x_4 = -m$$

Pentru a calcula rădăcinile în funcție de coeficienți observăm că

$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = (m^2 - n^2)\left(mn + \frac{m}{n}\right) + 2m^3 = -b$$

care pentru $n = -1$ dă $m = -b/2$ și deci

$$x_1 = -\frac{b}{2} - 1 \quad ; \quad x_2 = -\frac{b}{2} + 1 \quad ; \quad x_3 = x_4 = -\frac{b}{2}.$$

Plecând dela una din celelalte relaţiuni între coeficienţi şi rădăcini se pot determina valorile coeficienţilor a şi c precum şi valorile rădăcinilor în funcţie de aceşti coeficienţi.

2°. Ca şi la 1° avem

$$\Sigma x_i = 2m + mn + \frac{n}{m} = 0$$

$$-\frac{a}{3} = m^2 \quad \text{şi} \quad -\frac{2a}{a-3} = n \quad \therefore \quad n = -\frac{2m^2}{1+m^2}$$

iar rădăcinile ecuaţiei vor fi

$$(1) \qquad x_1 = m\frac{(m-1)^2}{1+m^2} \; ; \quad x_2 = m\frac{(m+1)^2}{1+m^2} \; ;$$

$$x_3 = \frac{-2m^3}{1+m^2} \; ; \quad x_4 = \frac{-2m}{1+m^2} .$$

Coeficienţii a, b, c, în funcţie de m se deduc din relaţiile

$$\Sigma x_1 = 0$$

$$(2) \qquad \Sigma x_1 x_2 = -3m^2 = a$$

$$(3) \qquad \Sigma x_1 x_2 x_3 = -2m^3 \frac{m^4 - 6m^2 + 1}{(1+m^2)^2} = -b .$$

$$(4) \qquad \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = 4m^6 \frac{(1-m^2)^2}{(1+m^2)^4} = c .$$

Ecuaţia de rezolvat devine

$$(1+m^2)^4 x^4 - 3m^2 (1+m^2)^4 x^2 + 2m^3 (1+m^2)^2 (m^4 - 6m^2 + 1) x + 4m^6 (1-m^2)^2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt date de şirul (1).

Notă. 1°. Au rezolvat problema dând soluţii numai parţial exacte, D-nii: M. BÂRZESCU, A. GH. ANDREI, D. GH. VASILIU, (Liceul militar, Iaşi); TR. DUMITRESCU, E. CARAMALĂU (Liceul „Traian", T.-Severin); V. D. PĂLĂCEANU (Liceul militar, Timişoara); CĂP. E. ŞT. IACOB, MARIN GH. POPESCU (Liceul „Brătianu", Piteşti); MARCEL D. COTARIU (Brăila) şi MIRCEA C. MANOLACHE (Bacalaureat).

2°. Atât la punctul 1° cât şi la punctul 2° al enunţului este de observat că m şi n nu trebue să fie ambele *date*, ci numai unul din ele, valoarea lui deducându-se în funcţie de celălalt.

3°. Dacă valorile lui m şi n nu sunt date ci trebue căutate aşa încât să fie reale, atunci punctul 2° al problemei necesită o discuţie căci valorile coeficienţilor a, b, c sunt legate de m prin relaţiuni de grad superior lui 2. Astfel prima relaţie

$$-3m^2 = a$$

arată că trebue să avem neapărat $a < 0$.

Dacă în (3) înlocuim pe m^2 prin valoarea dată de (2) găsim

$$\frac{n^2}{18}(a^2 + 18a + 9) = bm.$$

Trinomul din paranteză este negativ pentru valori cuprinse între

$$a_1 = -9 + 6\sqrt{2} \quad \text{şi} \quad a_2 = -9 - 6\sqrt{2}$$

aşa că ţinând seamă de (4) putem forma tabloul

$$-\infty < a < a_2 \ \ldots \ b > 0 \ , \ m > 0 \text{ sau } b < 0 \ , \ m < 0$$
$$a_2 < a < a_1 \ \ldots \ b > 0 \ , \ m < 0 \text{ sau } b < 0 \ , \ m > 0$$
$$a_1 < a < 0 \ \ldots \ b > 0 \ , \ m > 0 \text{ sau } b < 0 \ , \ m < 0.$$

Odată ales m din relaţia

$$m = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

rădăcinile se găsesc foarte uşor.

GL. G. B.

PROBLEMA 5842. *Să se arate că expresia*

$$E = \sin^{4p}\alpha + \cos^{2q}\alpha - 1$$

se împarte exact cu $e = \cos^2 2\alpha - 1$ *şi să se calculeze câtul împărţirii.*

IONEL I. STAMATE.

Soluţie. Expresia se poate scrie astfel

$$E \equiv (\sin^2\alpha)^{2p} + (\cos^2\alpha)^q - 1 = \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)^q - 1.$$

Punând $\cos 2\alpha = x$ se obţine polinomul

$$E(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^q - 1$$

care este divizibil cu $E(x) = x^2 - 1$, căci $E(-1) = 0$ şi $E(+1) = 0$.

Pentru calculul câtului, avem succesiv [1])

$$E(x) = (x-1)\left\{\frac{1}{2^{2p}}(x-1)^{2p-1} + \frac{1}{2^q}\left[(x+1)^{q-1} + 2(x+1)^{q-2} + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + 2^{q-2}(x+1) + 2^{q-1}\right]\right\} = (x^2-1) \times$$

$$\left\{\frac{1}{2^{2p}}\left[(x-1)^{2p-2} - 2(x-1)^{2p-3} + 2^2(x-1)^{2p-4} - \ldots + 2^{2p-2}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^q}\left[(x+1)^{q-2} + 2(x+1)^{q-3} + \ldots + 2^{q-2}\right]\right\}$$

Evident expresia ultimă, a câtului, s'ar putea scrie mai condensat, dar nu o credem necesară.

Soluţii bune s'au primit dela D-nii: Sub-Lt. DUMITRU CIOC (Şc. Of. rez. Artilerie), P. P. DRĂGHICESCU (Politehnica Bucureşti), VRÂNCEANU GH. (elev clasa a VI-a, Liceul Militar „M. Viteazul" Timişoara), VASILE D. PĂLĂCEANU (Bacalaureat, Liceul Militar „M. Viteazul" Timişoara), CRISTU I. CANTUNIAR (elev clasa a VII-a, Liceul „T. Maiorescu" Bucureşti), MIRCEA BÂRZESCU (Liceul Militar Iaşi), LUCIAN MUNTEANU, (student inginer), TUDOREL MIROSLAV şi NICOLAE V. IONESCU (studenţi la Şcoala Politehnică, Bucureşti).

D-nul ION A. BARBU a tratat problema în cazul particular $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$.

D-nii ŞTEFAN I. MIHĂILESCU şi GHEORGHE A. GRIGORE nu au calculat expresia câtului.

I. I. S.

PROBLEMA 5849. *Să se calculeze indicatorul numărului anilor de apariţie ai „Gazetei Matematice" în intervalul de când a apărut şi până astăzi precum şi indicatorul aceluiaşi număr subordonat anului de apariţie.*

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-l M. AL. LEON.

1. Fie A anul de apariţie, B anul actual şi N numărul anilor de apariţie, atunci avem:

$$I_{A \to B}(N) = I_B(N) - I_A(N).$$

1) Prof. TH. ANGHELUŢĂ, Algebră Superioară, volumul I, pag. 24, Ex. 22.

Cum: $A = 1895$; $B = 1944$ şi $N = 49$, avem:

$$I_{1944}(49) = 1667 \quad \text{şi} \quad I_{1895}(49) = 1625.$$

Deci:

$$I_{A \to B}(N) = 42$$

2. Avem:

$$I_N(A \,.\, N) = I_{49}(1895 \,.\, 49) = 34.$$

D-nii: M. F. VĂDUVA şi GH. D. BRAŞOVEANU au rezolvat bine punctul 1). Punctul 2) l-au interpretat luând:

$$I_{1895}(49 \,.\, 1895).$$

D-nii: G. M. NICOLAE şi GH. GH. VRÂNCEANU au luat pentru punctul 1): $\varphi(48) = 16$ şi pentru punctul 2):

$$I_{48}(48 \,.\, 1895) \quad \text{sau} \quad I_{1895}(48 \,.\, 1895).$$

I. L.

EXERCIŢII

5. *Se dau în plan punctele fixe* B, C *şi punctul mobil* A. *Din* C *ca centru şi cu raza egală cu* AB *se descrie un cerc, care taie perpendiculara din pe* A' *în* P. *Ştiind că unghiul* PCB *este constant, să se găsească locul lui* A.

CONSTANTIN PANTELIMON.

R. Unghiul PCB fiind constant şi egal cu α înseamnă că P se mişcă pe o dreaptă Δ trecând prin C şi că A se găseşte pe perpendiculara din P pe BC aşa încât AB şi CP sunt egale. Fie M proiecţia lui A pe perpendiculara în C pe BC. Avem

$$\overline{AM} = \overline{A'C} = PC\cos\alpha \qquad (1)$$

iar prin ipoteză

$$\overline{AB} = \overline{PC}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{1}{\cos\alpha} = C^t < 1.$$

Deci A descrie hiperbola cu un focar în B, cu directoarea CM şi cu excentricitatea egală cu $\frac{1}{\cos\alpha}$.

6. *Dacă* h'_a, h'_b, h'_c *sunt distanţele ortocentrului la cele trei vârfuri ale unui triunghiu atunci expresiunea*

$$\frac{\Sigma a^2 h'_a \operatorname{cosec} A}{8R}$$

reprezintă suprafaţa acelui triunghiu.

MIHAI R. CONSTANTINESCU.

R. Fie d_a distanţa dela ortocentru la latura a. Se ştie că $h'_a = 2d_a$. Deci

$$a^2 h'_a \operatorname{cosec} A = 2ad_a \frac{a}{\sin A} = 4Rad_a$$

şi expresia dată devine

$$E = \frac{4R(ad_a + bd_b + cd_c)}{8R}.$$

Dar paranteza dela numărător era tocmai 2S deci

$$E = S.$$

7. *Să se afle limita expresiei*

$$E = \frac{\sqrt{10x^2 - a^2} - \sqrt{7x^3 + ax(21x \mid a (}}{\sqrt{ax(5a^2 + 7ax + 4x^2)} - \sqrt{a^5 + x^5 + ax(7a^3 + 8x^3 + 9a^2x + 6ax^2)}}$$

când x *tinde către* a.

A. H. CUBAT

R. Pentru $x = a$ expresia E ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Adunăm la numărător $(+3a - 3a)$, la numitor $(+2a - 2a)$ şi împărţim numărătorul şi numitorul prin $x - a$ şi obţinem o serie de expresii F_i, cărora le căutăm limitele separat. Avem

$$F_1 = \frac{\sqrt{10x^2 - a^2} - 3a}{x - x} = \frac{10x^2 - 10a^2}{(x - a)\left[\sqrt{10x^2 - a^2} + 3a\right]} = \frac{10(x + a)}{3a + \sqrt{10x^2 - a^2}}$$

$$\therefore \operatorname{Lim} F_{1x \to a} = \frac{20a}{3a + 3a} = \frac{10}{3}.$$

Apoi

$$F_2 = \frac{\sqrt[3]{7x^3 + ax(21x - a)} - 3a}{x - a}$$

care devine $\frac{0}{0}$ pentru $x = a$. Aplicăm regula lui HOSPITAL şi găsim

$$\operatorname{Lim} F_{2x \to a} = \frac{62}{27}.$$

La fel se găseşte fie prin aplicarea regulii lui HOSPITAL fie prin raţionalizarea numărătorilor:

$$\text{Lim } F_3 = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[4]{ax\,(5a^2 + 7ax + 4x^2)} - 2a}{x - a} = \frac{31}{32}$$

$$\text{Lim } F_3 = \text{Lim}_{x \to a} \frac{\sqrt[5]{a^5 + x^5 + ax\,(7a^3 + 8x^3 + 9a^2\,x + 6ax^2)} - 2a}{x - a} = 1.$$

Deci

$$\text{Lim } E_{x \to a} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{62}{27}}{\frac{31}{32} - 1} = -\frac{896}{27}.$$

PROBLEME PROPUSE

6036. Să se arate, că numerele de forma

$$N \equiv \underbrace{44\ldots4}_{n}\ \underbrace{222\ldots2}_{n+1}\ 5$$

sunt patrate perfecte.

C. C. MIHĂILESCU.

6037. Să se arate, că dacă $P_{x \to y}(z)$ reprezintă produsul numerelor prime cu z din şirul numerelor cosecutive dela x la y, atunci

$$[P_{N \to 2N}(2N)]^2 - 1 = \mathcal{M}N.$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

6038. Fie s numărul numerelor prime, diferite între ele, care divid pe M: fie

$\Delta_0(x) = x^{s-1}$, $\Delta_1(x) = (x+1)^{s-1}, \ldots, \Delta_n(x) = \Delta_{n-1}(x+1) - \Delta_{n-1}(x)$, adică diferenţele succesive ale funcţiei x^{s-1}, şi fie

$$F(x) = \frac{\Delta_{m-1}(x)}{(m-1)!} + \frac{\Delta_{m-2}(x)}{(m-2)!} + \ldots + \frac{\Delta_1(x)}{1} + 1.$$

Să se demonstreze, că dacă nu ţinem seamă de ordinea factorilor, numărul M poate fi descompus în $F(1)$ moduri diferite într'un produs de m factori primi între ei doi câte doi.

IOAN B. FLORESCU.

6039. Să se găsească logaritmul numărului 1942 într'un sistem cu baza x, în care 0,7349 are ca logaritm pe $\overline{2},36$.

G-L GH. BUICLIU.

6040. Să se determine întregii a, b, c, d astfel ca

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{a}+\operatorname{arctg}\frac{1}{b}+\operatorname{arctg}\frac{1}{c}+\operatorname{arctg}\frac{1}{d}=\frac{\pi}{4}\cdot$$

M. GHERMĂNESCU.

6041. Să se formeze transformata ecuației

$$D(x)\equiv\begin{vmatrix} 1 & 12 & 36-x \\ 3 & 33+x & 100 \\ 12-x & 107 & 300 \end{vmatrix}$$

prin substituția $y=(x-6)^2$. Să se arate, că ecuația în y astfel găsită este identică cu ecuația dată.

Să se explice rezultatul.

IONEL I. STAMATE.

6042. Convenind a nota, ca de obiceiu, prin $f(\varphi)$ funcția de funcție obținută prin suprapunerea funcțiilor $f(x)$ și $\varphi(x)$ de x, se cere să se găsească trei polinoame $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ de gradul al doilea și astfel ca să avem

$$P(Q)=Q(R)=R(P).$$

TIBERIU POPOVICIU.

6043. Să se găsească valoarea parametrului a din fracția

$$\frac{x^2+ax+1}{x^2(x+1)}$$

pentru care valoare, descompunerea acestei fracții în fracții simple să nu conție termenul în $\frac{1}{x}$.

MAIOR I. M. POPESCU.

6044. Se dă un cerc (C), o tangentă fixă (T) a acestui cerc şi o dreaptă Δ perpendiculară pe tangenta (T). Tangentele la cerc, duse dintr'un punct M, mobil pe Δ, taie tangenta (T) în punctele P şi Q. Se cere locul geometric al intersecţiilor perpendicularelor ridicate în P şi Q respectiv pe MP şi MQ.

GH. D. SIMIONESCU.

6045. Intr'un exagon, înscris în cercul (O), al cărui centru de greutate al vârfurilor este M, ortocentrele triunghiurilor formate de trei vârfuri consecutive, sunt vârfurile unui exagon, ale cărui diagonale principale concură într'un punct P aşa încât $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OM}$.

V. THÉBAULT.

6046. In triunghiul ABC, purtăm pe înălţimile din B şi C respectiv segmentele

$$\overline{BB'} = \overline{BB''} = \overline{AC} \quad ; \quad \overline{CC'} = \overline{CC''} = \overline{AB},$$

B', C' fiind duse către exteriorul triunghiului.

Să se arate, că triunghiurile AB'C', AB"C" sunt dreptunghice în A şi isoscele.

N. N. MIHĂILEANU.

6047. Să se arate, că suprafaţa unui triunghiu oarecare este dată de relaţia

$$S^2 = \frac{\Sigma\, r_a^2\, r_b^2}{\Sigma \operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2}},$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

ION S. ANTONIU.

6048. Se consideră două cercuri în acelaşi plan şi fie O_1 şi O_2 centrele lor, iar (Γ) patrulaterul format de tangentele lor comune. Să se arate, că

a) Focarele reale ale conicelor înscrise în patrulaterul (Γ) se găsesc sau pe linia centrelor sau pe cercul de diametru $\overline{O_1O_2}$.

In ambele cazuri, focarele şi centrele O_1 şi O_2 determină o diviziune armonică.

b) Focarul parabolei, înscrise în patrulaterul (Γ), se găseşte la mijlocul segmentului $\overline{O_1O_2}$.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6049. Un fumător face colaci de fum. Să asimilăm unul din aceşti colaci cu un cerc de rază variabilă şi să presupunem că într'un timp T centrul cercului străbate pe o orizontală o distanţă *d* cu iuţeală constantă şi că *în acelaşi timp* raza cercului variază uniform dela *r* la R. Planul, ce conţine acest cerc, rămîne vertical şi *se roteşte în jurul diametrului vertical* cu iuţeala unghiulară constantă ω.

Să se determine *iuţeala* şi *acceleraţia absolută* la momentul *t* pentru o particulă de fum a cărei rază la centru este înclinată cu unghiul α pe verticală.

In momentul iniţial planului cercului se va presupune perpendicular pe drumul străbătut de centrul cercului.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. La pag. 89, rândul 6 de jos, h_a în loc de *ha.*

La pag. 91, rândul 5, 7, 8, 20, η în loc de *n.*

La pag. 92, rândul 2, Γ_a în loc de Γ.

La pag. 92, rândul 3, $\frac{2}{r}$ în loc de $\frac{1}{ri}$.

La pag. 110, ultimul rând, x_s în loc de x_1.

2°. La problema 5994 propusă la pag. 708, Vol. XLIX se înlocueşte în partea finală a enunţului XLIV prin XLIX.

3°. In enunţul problemei 6033, propusă la pag. 112 din numărul precedent, se înlocuesc ultimele două litere B prin litera A şi se caută deci *locul proiecţiei lui* T *pe* AM.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbu A. I. (5882, 915, 84, 6005, 15); *Braşoveanu D. Gh.* (4022, 102, 5850, 62, 5916, 37, 51, P); *Drăghicescu Elena* (5966); *Drăghicescu P. P.* (N); *George M. N.* (5907, 56, 65, 71, 6002); *Gheorghe A. Gr.* (5915, 71, 6002); *Iliescu C. C.* (5871, 926, 30, 36, 40, 54, 66, 71, 82); *Leon A. M.* (5877, 98, 966, 6015); *Pantelimon C.* (5852, 59, 912, 16, 54, 56, 71, 85, 86, 6002, 15); *Văduva F. M.* (5912); *Vrânceanu Gh. Gh.* (4022, 270, 5076, 6007, 08).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 500

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 600

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 450

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 750

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 350

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 500

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 500

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 200

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 600

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 300

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . Lei 300

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 27.791.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII

SUMARUL

1. Propuneri pentru comemorarea a 50 ani de viață a „Gazetei Matematice . . . . *Delegația Societății.*
2. Periodicitatea de ordin șase a triunghiurilor pseudo-isoscele . . . . . *D. Barbilian.*
3. Note matematice: 12 — 15.
4. Bibliografie.
5. Diverse.
6. Probleme rezolvate: 1591, 4853, 5200, 5292, 5870, 5971.
7. Exerciții: 8—9.
8. Probleme propuse: 6050 — 6064.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1944

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier,

---

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6006, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	100 extrase tipărite în continuarea revistei
5— 8 pagini	500
9—16 „	1000
Coperta	800

(Se adaugă la sumele de mai sus impozitele de 2 şi 5%).

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

PROPUNERI PENTRU COMEMORAREA A 50 ANI DE VIAȚĂ A „GAZETEI MATEMATICE“

La 15 Septembrie 1895 a apărut primul număr din *Gazeta Matematică*. De atunci revista a ieșit de sud tipar în fiecare lună cu o precizie matematică pe care n'au împiedecat-o nici războaiele sau răscoalele, nici invaziunile sau bombardamentele. In 15 Septembrie 1945 se vor împlini *cincizeci de ani* de apariție neîntreruptă, fapt foarte rar chiar în istoria publicațiilor științifice străine și cu atât mai rar în știința românească încă foarte tânără. Societatea *Gazeta Matematică* se pregătește să cinstească acest eveniment în mod demn de trecutul revistei și de munca și sacrificiile animatorilor ei din prima jumătate de secol, neuitații V. CRISTESCU, A. G. IOACHIMESCU, G. ȚIȚEICA și veneratul ION IONESCU.

S'a discutat în mai multe ședințe felul cum ar trebui însemnată în viața *Gazetei Matematice* intrarea în a doua jumătate de veac. Am ajuns la concluzia că este nemerit să prezentăm sugestiile făcute în aceste ședințe și să rugăm pe membrii *Gazetei Matematice* și pe corespondenți să ne ajute în sarcina organizării jubileului semicentenarului, dându-ne sugestiile lor, completând sau modificând propunerile noastre.

Propunerile la care ne-am oprit până acum și care formează un proiect de program se pot grupa în următoarele categorii: publicațiuni, manifestări publice, reuniuni colegiale.

I. **Publicațiuni.** 1°. Numărul 1 din 15 Septembrie 1945, consacrat comemorării, va cuprinde un articol festiv, articole originale cu caracter elementar, scrise de membrii societății, precum și fotografiile celor patru „stâlpi“ ai *Gazetei Matematice:* ION IONESCU, G. ȚIȚEICA, A. G. IOACHIMESCU, V. CRISTESCU.

2°. Se va tipări, în Biblioteca *Gazeta Matematică*, un volum comemorativ, constituit din 3 fascicole:

a) Selecțiuni din materialul publicat de cei patru „stâlpi“ în cursul primilor cincizeci de ani în *Gazeta Matematică*. Pe cât e cu putință, fiecare autor va avea circa 60 de pagini;

b) Procesele verbale ale ședințelor *Gazetei Matematice* în primii douăzeci și cinci de ani de existență;

c) Punerea la curent, pentru ultimii zece ani, al istoricului *Gazetei Matematice*, tipărit cu ocazia împlinirii a patruzeci de ani, în 1935.

II. **Manifestări publice.** 1°. O *ședință festivă* la Fundația Carol, sau la Politehnică, în care se va face istoricul publicației revistei și eventual se vor citi adrese din partea Instituțiunilor științifice din țară.

2°. O *expoziție* a cărții matematice românești, dela Aritmeticile lui GH. ȘINCAI și AMFILOCHIE DIN HOTIN, până azi. Se vor prezenta diagrame despre activitatea matematică în licee, se va organiza o retrospectivă a *Gazetei Matematice* și, eventual, a *Recreațiunilor Științifice* din Iași (1882—1889).

3°. O serie de 4—6 *conferințe*, la Societatea Politehnică și la Radio, tratând despre viața matematicei în general, și despre matematica în România în particular.

4°. Se va interveni ca în Septembrie 1945 să se facă în fiecare liceu o *ședință* consacrată matematicei.

5°. Dacă împrejurările o vor permite, se va încerca organizarea celui de al *treilea congres* al matematicienilor români (cu participare internațională) în luna Septembrie 1945. Congresul ar avea trei ramuri: a) *științifică;* b) *didactică*, privitoare la programa, metodologia matematicei în învățământul secundar, probleme în care experiența *Gazetei Matematice* poate aduce lămuriri prețioase; c) *matematici aplicate.*

6°. Se va cerceta posibilitatea baterei unei medalii comemorative și eventual, a unei serii de mărci poștale jubiliare.

III. **Reuniuni colegiale.** O masă comună a membrilor *Gazetei Matematice* cu actualii și foștii corespondenți.

Acest proiect de program va fi amendat, amplificat sau redus, după propunerile ce vom primi, după posibilități și după hotărîrile ce se vor lua de Adunarea Generală din Februarie 1945.

Pentru a avea timpul necesar organizării jubileului proiectat, rugăm pe Domnii membri și corespondenți să ne trimită sugestiile d-nealor cel mai târziu până la 25 Februarie 1945 la Sediul Societății, în Calea Griviței Nr. 158.

DELEGAȚIA „GAZETEI MATEMATICE"

A. BUNESCU, I. CHIȚULESCU, P. SERGESCU.

PERIODICITATEA DE ORDIN ŞASE A TRIUNGHIURILOR PSEUDO-ISOSCELE

1°. Insemnăm cu α_+, β_+, γ_+ şi α_-, β_-, γ_- respectiv bisectoarele interioare şi exterioare ale unui triunghiu ABC. Celelalte notaţii fiind cele obişnuite în trigonometrie, se găseşte uşor că avem

$$(1)\quad \alpha_+^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)\ ,\ \alpha_-^2 = \frac{4bc}{(b-c)^2}(p-b)(p-c)$$

şi permutatele circulare ale acestora.

Un triunghiu pseudo-isoscel în A corespunde, prin definiţie, condiţiilor

$$\beta_- = \gamma_-\ ,\quad b \neq c.$$

Folosind (1) se găseşte ca ecuaţie de condiţie a triunghiurilor pseudo-isoscele

$$(2)\qquad a^3 - (b+c)a^2 + 3bca - bc(b+c) = 0.$$

Formal, expresia lui α_+^2 din (1) poate fi dedusă din expresia lui α_-^2 înlocuind pe b prin $-b$ (sau c prin $-c$) şi lăsând neschimbate celelalte două litere. Se verifică uşor că la această schimbare valorile lui γ_+^2, γ_-^2 (sau β_+^2, β_-^2) se permută de asemenea, pe când valorile lui β_+^2, β_-^2 (sau γ_+^2, γ_-^2) rămân fixe.

Aşa fiind să presupunem în (2) valoarea $a > 0$ aleasă odată pentru totdeauna şi să lăsăm lui b, c libertatea de a lua valori reale oarecari. In virtutea observaţiei de mai sus, relaţia (2) devine susceptibilă de a defini triunghiuri mai generale decât cele denumite până acum pseudo-isoscele, anume toate triunghiurile de bază $a > 0$, pentru care avem una sau alta din condiţiile

$$(3)\qquad \beta_\varepsilon = \gamma_\eta\ ,\quad (b \neq c)\ ,\quad \varepsilon = \pm\ ,\quad \eta = \pm.$$

2°. Vom continua să numim orice trilater $a > 0$, b, c pentru care avem una din relaţiile (3),—unde β_ε şi γ_η sunt definiţi de (1)—: *triunghiu pseudo-isoscel.*

Numai că, printre aceste trilatere sunt unele care nu dau naştere la veritabile triunghiuri.

Condiția necesară și suficientă ca $|a|, |b|, |c|$ să formeze un adevărat triunghiu este [1]), după cum știm

$$(4) \qquad -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 > 0.$$

Vom numi *triunghiu eliptic* trilaterul care satisface la relația (4), iar *triunghiu iperbolic*, trilaterul care face negativ primul membru din (4). Ceea ce ar trebui să numim triunghiuri parabolice, le lăsăm la o parte pentru a nu încărca enumerarea sau, mai de grabă, le considerăm cazuri — limită de triunghiuri iperbolice.

Incât, revenind la triunghiurile pseudo-isoscele în înțelesul larg dat mai sus, avem de considerat următoarele specii:

1. Triunghiuri pseudo-isoscele eliptice de prima speță, caracterizate prin (2), (4) și

$$b > 0 \quad , \quad c > 0.$$

Proprietatea lor este

$$\beta_- = \gamma_-.$$

2. Triunghiuri pseudo-isoscele eliptice de a doua speță, caracterizate prin (2), (4) și

$$bc < 0.$$

Proprietatea lor este

$$\beta_+ = \gamma_- \quad \text{sau} \quad \beta_- = \gamma_+.$$

3. Triunghiuri pseudo-isoscele eliptice de a treia speță, caracterizate prin (2), (4) și

$$b < 0 \quad , \quad c < 0.$$

Proprietatea lor este

$$\beta_+ = \gamma_+.$$

1′. Triunghiuri pseudo-isoscele iperbolice de prima speță, caracterizate prin (2), contrara lui (4) și

$$bc < 0.$$

---

1) Intr'adevăr, (4) se mai scrie

$$[a^2 - (b - c^2)^2]\,[a^2 - (b + c)^2] < 0.$$

Considerând primul membru ca un trinom de gradul al doilea în a^2, conchidem

$$|b| - |c| < |a| < |b| + |c| \quad , \quad (|b| > |c|),$$

adică tocmai condițiile de existență ale unui triunghiu de laturi $|a|, |b|, |c|$.

Proprietatea lor este

$$\beta_+ = \gamma_- \quad \text{sau} \quad \beta_- = \gamma_+ .$$

2′. Triunghiuri pseudo-isoscele iperbolice de speţa doua, caracterizate prin (2), contrara lui (4) şi

$$b > 0 \quad , \quad c > 0.$$

Proprietatea lor este

$$\beta_- = \gamma_- .$$

3′. Triunghiuri pseudo-isoscele iperbolice de speţa treia, caracterizate prin (2), contrara lui (4) şi

$$b < 0 \quad , \quad c < 0.$$

Proprietatea lor este

$$\beta_+ = \gamma_+ .$$

Această împărţire în specii este pur formală. Ea are nevoie să fie întărită cu anume teoreme de existenţă, într'unul din alineatele viitoare.

Dar putem constata chiar de pe acum *inexistenţa triunghiurilor de speţa 3 şi 3′*. Într'adevăr, pentru aceste triunghiuri membrul întâiu din (2) are toţi termenii pozitivi, deci nu poate fi nul [1]).

Tot astfel vom demonstra la timp că triunghiurile 2′ nu sunt realizabile.

In ceea ce priveşte triunghiurile 1′, vom arăta, la sfârşitul acestui articol, figura ce trebue să le substituim, pentru a ne face liberi de conceptul numeric, de trilater *a, b, c*.

3°. *Teoremă de închidere.*

Dacă a > 0, b, c *e un triunghiu pseudo-isoscel de începere, lăsând baza* a *fixă, putem determina un lanţ de triunghiuri pseudo-isoscele de laturi succesive* ($b_0 = b$, $c_0 = c$):

$$b_0, c_0;\ b_0, c_1;\ b_1, c_1;\ b_1, c_2;\ b_2, c_2;\ b_2, c_3;\ b_3, c_3,$$

periodic, de ordin 6, aşa dar:

$$b_3 = b_0 \quad , \quad c_3 = c_0 ,$$

după a şasea operaţie, dar nu mai de vreme.

---

1) Imposibilitatea triunghiurilor de speţa 3 constitue o teoremă bine cunoscută de geometrie. Pentru demonstraţia ei elementară trimitem la Exerciţiile de Geometrie de F. G. M.

Presupunem latura a egală cu unitatea pozitivă:

$$a = 1.$$

Ecuaţia (2) se scrie

$$(5) \qquad 1 - b - c + 3bc - bc(b + c) = 0.$$

Punem

$$(6) \qquad u : v : w = 1 : bc : -(b + c).$$

Se vede uşor că b, c sunt tocmai parametrii θ ai punctelor tăiate pe conica H' de dreapta

$$(7) \qquad x : y : z = \theta^2 : 1 : \theta$$

$$ux + vy + wz = 0.$$

Incât (5) admite interpretarea geometrică următoare: este corespondenţa tăiată pe conica H din (7) de tangentele conicei K, de ecuaţie tangenţială

$$(8) \qquad u^2 + wu + 3uv + vw = 0.$$

Să considerăm următoarea soluţie particulară a corespondenţei (5)

$$b_0^* = 0 \quad , \quad c_0^* = 0.$$

Pornind dela aceasta, determinăm următorul lanţ de soluţii, ale lui (5), aşa încât două soluţii vecine să aibă un element comun:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &b_0^* = 0 \ , \ c_0^* = 1 \ , \ b_2^* = \infty \ , \ c_1^* = 0, \\ &b_1^* = 1 \ , \ c_0^* = 1 \ , \ b_2^* = \infty \ , \ c_2^* = \infty, \\ &b_1^* = 1 \ , \ c_1^* = 0 \ , \ b_3 = 0 \ , \ c_2^* = \infty, \\ &b_3^* = 0 \ , \ c_3^* = 1. \end{aligned}$$

Avem un lanţ periodic, de ordin şase, căci

$$b_3^* = b_0^* \ , \ c_3^* = c_0^*$$

după a şasea operaţie, dar nu mai de vreme. El se interpretează ca un exagon particular

$$b_0^* \ c_0^* \ b_1^* \ c_1^* \ b_2^* \ c_2^*$$

înscris conicei H şi circumscris conicei K. Laturile $b_1^* c_0^*$ şi $b_2^* c_2^*$ trebuesc înlocuite cu tangentele în punctele $\theta = 1$ şi $\theta = \infty$ la H.

Acest exagon nu se desface într'un poligon de un număr mai mic de laturi, parcurs de mai multe ori, căci în (9) latura $b_1^* c_0^*$ (sau $b_2^* c_2^*$) nu se repetă.

In baza teoremei închiderii, a lui PONCELET, conicele H, K admite o infinitate de *exagoane veritabile* respectiv înscrise şi circumscrise. Deci, pornind dela soluţia arbitrară b_0, c_0 a lui (5), avem lanţul periodic, de ordin 6, din enunţ.

Teorema e demonstrată.

Rămâne încă de precizat speţa diverselor triunghiuri pseudo-isoscele care compun lanţul. Pentru aceea e nevoie de o anume pregătire.

4°. *Existenţa, respectiv inexistenţa, speciilor de triunghiuri pseudo-isoscele.*

Conica K din (8) admite următoarea reprezentare parametrică raţională

$$(10) \qquad u : v : w = -(\sigma - 3) : (\sigma - 1) : \sigma(\sigma - 3)$$

unde parametrul are următoarea interpretare geometrică

$$(11) \qquad \sigma = b + c.$$

Condiţia ca o dreaptă u, v, w să taie sau să atingă conica H din (7) se scrie

$$w^2 - 4uv \geqslant 0.$$

Deci condiţia ca tangentele (10) ale lui K să întâlnească în puncte reale pe H este

$$(12) \qquad (\sigma - 2)(\sigma - 3)(\sigma^2 - \sigma + 2) \geqslant 0.$$

Polinomul din primul membru are numai două rădăcini reale. Aşa dar H şi K au numai două tangente comune ale căror contacte U, W cu K au următorii parametri:

$$(13) \qquad U(\sigma = 2) \quad , \quad W(\sigma = 3).$$

Condiţia (12) e echivalentă cu

$$(14) \qquad \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Să cercetăm acum intervalul de variaţie al parametrului σ din (14) corespunzător tangentelor (10) care taie pe H imagina unui triunghiu pseudo-isoscel eliptic respectiv iperbolic.

Inegalitatea (4) se scrie, după înlocuirile (6):

$$-u^4 - w^4 + 4uvw^2 + 2u^2w^2 - 4u^3v > 0.$$

Introducând reprezentarea parametrică (10) obţinem condiţia ca tangenta (10) să taie pe H imagina unui triunghiu pseudo-isoscel eliptic

$$(15) \qquad (\sigma - 1)^4 (\sigma + 1) (3 - \sigma)^3 > 0.$$

Condiţia ca triunghiul să fie iperbolic se scrie inversând semnul neegalităţii. Dar (15) e echivalentă cu

$$-1 < \sigma < 3$$

cu excepţia, bine înţeles a valorii $\sigma = 1$. Confruntată cu (14) condiţia se reduce la

$$(16) \qquad \boxed{-1 < \sigma < 2}.$$

Se introduce astfel un punct

$$(17) \qquad V(\sigma = -1)$$

pe arcul UW din (14) care-l separă în două regiuni UV şi VW corespunzătoare respectiv triunghiurilor pseudo-isoscele eliptice şi iperbolice.

Pe de altă parte ecuaţia care dă parametrii

$$\theta = b \quad , \quad \theta = c$$

ai intersecţiilor tangentei (10) la K, cu H din (7) este

$$(18) \qquad -(\sigma - 3)\theta^2 + \sigma(\sigma - 3)\theta + \sigma - 1 = 0.$$

Când σ variază pe cercul UW din (14) rădăcinile acestei ecuaţii am văzut că sunt reale. Ele sunt amândouă pozitive când, în plus, avem în acelaşi timp

$$\sigma < 0 \quad , \quad (\sigma - 1)(\sigma - 3) < 0.$$

Confruntate între ele şi apoi cu inegalitatea (14) condiţiile se reduc la

$$(19) \qquad \boxed{1 < \sigma < 2}.$$

Se introduce punctul

$$(20) \qquad R(\sigma = 1)$$

care desparte arcul UW din (14) în două regiuni UR şi RW corespunzătoare respectiv la triunghiuri pseudo-isoscele de laturi

b, c amândouă pozitive sau de semne contrare. Am văzut direct în 2^0 şi de altfel se poate verifica uşor pe (19), că triunghiurile pseudo-isoscel nu pot avea amândouă laturile negative.

Ţinând seamă de ordonarea pe care parametrul proiectiv σ o impune punctelor (13), (17) şi (20) pe arcul (14), rezultatele (16) şi (19) pot fi rezumate pe următoarele scheme:

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{lcccc} & U & R & V & W \\ \sigma = & 2 & 1 & -1 & 3 \\ & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{eliptic}}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{iperbolic}}} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcccc} & U & R & V & W \\ \sigma = & 2 & 1 & -1 & 3 \\ & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{b>0,\ c>0}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{bc<0}} \end{array}\right.$$

Din compararea lor conchidem la următoarea teoremă [în care baza triunghiului are din nou valoarea generală $a > 0$ şi în care parametrului σ i se substitue interpretarea geometrică din (11)]:

Teoremă. *Există două specii de triunghiuri pseudo-isoscele eliptice şi o singură specie de triunghiuri pseudo-isoscele iperbolice. Ele corespund următoarelor neegalităţi*

eliptice, prima speţă: $\quad 2a > b + c > a$

eliptice, a doua speţă: $\quad a > b + c > -a$

iperbolice $\quad b + c < -a$ sau $b + c > 3a$.

5°. *Funcţiunea alternată a unui lanţ periodic de triunghiuri pseudo-isoscele.*

Fie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ parametrii σ ai laturilor unui exagon înscris lui H şi circumscris lui K. E clar că punctele de contact descriu pe K o serie lineară g_6^1, unde 1 indică numărul parametrilor variabili. Cum numărul 6 are factorii 2 şi 3 rezultă că punctele

$$(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5)\ ,\ (\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$$

de o parte şi

$$(\sigma_1, \sigma_4)\ ,\ (\sigma_2, \sigma_5)\ ,\ (\sigma_3, \sigma_6)$$

descriu respectiv două anume serii lineare [1]) g_3^1 şi g_2^1.

1) Seria g_2^1 este evident o involuţie. Deci diagonalele care unesc vârfurile opuse într'un poligon al lui PONCELET de $2n$ vârfuri trec prin acelaşi punct fix. Sub această formă proprietatea e cunoscută şi e datorată chiar lui PONCELET.

Să ne ocupăm de seriile g_2^1 și g_3^1.

Conicele H, K au un exagon particular înscris și circumscris, anume acela ale cărui vârfuri sunt date de tabloul (9). Cu ajutorul parametrilor θ ai acestor vârfuri putem găsi coeficienții u, v, w ai laturilor, folosind formulele (6). Apoi, din (10) determinăm parametrii σ ai acestor laturi. Găsim

$$\sigma_1^0 = 2,\ \sigma_2^0 = 1,\ \sigma_3^0 = \infty,\ \sigma_4^0 = 3,\ \sigma_5^0 = \infty,\ \sigma_6^0 = 1.$$

De aici conchidem că ecuația seriei lineare g_3^1 este

$$(22) \qquad (\sigma - 1)^2 (\sigma - 3) - \lambda (\sigma - 2) = 0,$$

unde λ e un parametru variabil. Ecuația seriei lineare g_2^1, sub formă de transformare lineară involutivă este

$$(23) \qquad \sigma^*\sigma - \sigma^* - \sigma - 1 = 0.$$

Așa dar punctele σ_1, σ_3, σ_5, de o parte și σ_2, σ_4, σ_6, de alta, satisfac la două ecuații de forma (22), anume

$$(24) \qquad \frac{(\sigma - 1)^2 (\sigma - 3)}{\sigma - 2} = \lambda\ ,\quad \frac{(\sigma^* - 1)^2 (\sigma^* - 3)}{\sigma^* - 2} = \lambda^*.$$

Trecerea dela o ecuație la cealaltă e realizată de involuția (23). Această proprietate stabilește între λ și λ^* legătura

$$(24') \qquad \lambda\lambda^* = 8.$$

Recunoaștem că funcțiunea

$$(25) \qquad f(\sigma) = \frac{-\lambda - \sqrt{8}}{\lambda + \sqrt{8}}$$

sau

$$f(\sigma) = \frac{(\sigma - 1)^2 (\sigma - 3) - \sqrt{8}(\sigma - 2)}{(\sigma - 1)^2 (\sigma - 3) + \sqrt{8}(\sigma - 2)}$$

ia în punctele σ_1, σ_3, σ_5, de o parte și σ_2, σ_4, σ_6 de alta, valori egale și de semne contrare.

Revenind la valoarea generală $a > 0$ a bazei și înlocuind pe σ prin $b + c$, conform lui (11), obținem următoarea

Teoremă. *Pe un lanț periodic de șase triunghiuri pseudo-isoscele următoarea funcțiune de laturi* (unde $a > 0$, iar b, c susceptibile de semn):

$$(26) \quad f(a, b, c) = \frac{(b + c - a)^2 (b + c - 3a) - \sqrt{8}(b + c - 2a) a^2}{(b + c - a)^2 (b + c - 3a) + \sqrt{8}(b + c - 2a) a^2}$$

ia alternativ valori egale și de semn contrar.

6⁰. *Speciile triunghiurilor pseudo-isoscele dintr'un lanț periodic.*

Când punctul S de parametru σ variază pe arcul UW din (14), e clar că funcțiunea λ din (24), iar valori pozitive, iar pentru capetele intervalului chiar 0 și ∞. Cum λ e continuă în intervalul dela $\sigma = 3$, $\sigma = +\infty$ și apoi dela $\sigma = -\infty$, $\sigma = 2$ rezultă că ia toate valorile dela 0 la $+\infty$.

Insă laturile tangente într'un punct S al arcului UW din (14) dau naștere la un exagon înscris și circumscris respectiv conicelor H și K. Incât, în virtutea observației de mai sus și a proprietății funcțiunii λ de a rămâne invariantă pentru înlocuirile $\sigma = \sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$, rezultă că ecuația în σ

$$(27) \qquad g(\sigma) \equiv (\sigma - 1)^2(\sigma - 3) - \lambda(\sigma - 2) = 0 \quad \text{pentru}$$

$$(28) \qquad \lambda \geqslant 0$$

are toate rădăcinile reale. Avem însă

$$(29) \quad g(3) = -\lambda \ , \ g(+\infty) = +\infty \ , \ g(-\infty) = -\infty,$$
$$g(-1) = -4^2 + 3\lambda \ , \ g(1) = \lambda \ , \ g(2) = -1.$$

Se vede pe acest șir că, în virtutea lui (28), cele trei rădăcini reale ale lui (27) se găsesc în câte unul din intervalele:

$$3 < \sigma_1 < +\infty \ , \ -\infty < \sigma_3 < 1 \ , \ 1 < \sigma_5 < 2.$$

Să introducem pe arcul AW punctul

$$T(\sigma = \infty).$$

Arcul se împarte în intervalele

$$(30) \qquad \begin{matrix} W & & T & & R & & U \\ & \sigma_1 & & \sigma_3 & & \sigma_5 & \end{matrix}$$

care separă punctele $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5$.

Pe de altă parte involuția (23) permută parametrii (3, 2), (∞, 1) ai perechilor de puncte (W, U), (T, R) de pe K. Deci invariază arcul WU întreg iar, în interiorul lui, permută arcele WT, UR și invariază arcul TR. Dar involuția (23) permută încă punctele perechilor

$$\sigma_1, \sigma_4, \quad \sigma_2, \sigma_5, \quad \sigma_3, \sigma_6,$$

încât tabloul (30) se complectează și devine

$$(31) \qquad \begin{matrix} W & & T & & R & & U \\ & \sigma_1 & & \sigma_3 & & \sigma_5 & \\ & \sigma_2 & & \sigma_6 & & \sigma_4 & \end{matrix}$$

unde şi celelalte puncte σ_i sunt distribuite intervalelor care le conţin, potrivit comportamentului acestor intervale faţă de involuţia (23).

Intervalul TR cuprinde punctul V ($\sigma = -1$). Să cercetăm cum se situează punctele σ_3, σ_6 faţă de intervalul VR. Considerăm alături de (27) ecuaţia

$$(27') \qquad g^*(\sigma) \equiv (\sigma - 1)^2(\sigma - 3) - \lambda^*(\sigma - 2) = 0$$

de rădăcini σ_2, σ_4, σ_6, unde λ^* are valoarea din (24'). Avem

$$g(-1) = -16 + 3\lambda \quad , \quad g(1) = \lambda$$
$$g^*(-1) = -16 + 3\lambda^* \quad , \quad g^*(1) = \lambda^*.$$

In virtutea lui (28) rezultă

$$g(1) > 0 \quad , \quad g^*(1) > 0.$$

In virtutea lui (24') se exclude uşor simultaneitatea de semne $g(-1) > 0$, $g^*(-1) > 0$. Se găseşte:

$$g(-1) < 0 \quad , \quad g^*(-1) > 0 \quad \text{pentru} \quad 0 < \lambda < \frac{3}{8},$$

$$g(-1) < 0 \quad , \quad g^*(-1) < 0 \quad \text{„} \quad \frac{3}{8} < \lambda < \frac{16}{3},$$

$$g(-1) > 0 \quad , \quad g^*(-1) < 0 \quad \text{„} \quad \lambda > \frac{16}{3}.$$

Inlocuind funcţiunea λ cu funcţiunea $f(s)$ alternată din (25) sau funcţiunea $f(a, b, c)$ din (26), tabloul (31) se precizează astfel:

$$-1 < f(a, b, c) < \frac{3 - 8\sqrt{8}}{3 + 8\sqrt{8}} \quad \begin{cases} W & T & V & R & U \\ & \sigma_1 & & \sigma_3 & \sigma_5 \\ & \sigma_2 & \sigma_6 & & \sigma_4 \end{cases}$$

$$\frac{3 - 8\sqrt{8}}{3 + 8\sqrt{8}} < f(a, b, c) < \frac{-3 + 8\sqrt{8}}{3 + 8\sqrt{8}} \quad \begin{cases} W & T & V & R & U \\ & \sigma_1 & & \sigma_3 & \sigma_5 \\ & \sigma_2 & & \sigma_6 & \sigma_4 \end{cases}$$

$$\frac{-3 + 8\sqrt{8}}{3 + 8\sqrt{8}} < f(a, b, c) < 1 \quad \begin{cases} W & T & V & R & U \\ & \sigma_1 & \sigma_3 & & \sigma_5 \\ & \sigma_2 & & \sigma_6 & \sigma_4 \end{cases}$$

Comparând aceste tablouri cu tablourile (21) conchidem la următoarea:

Teoremă. *Un lanț periodic de triunghiuri pseudo-isoscele are două constituții diferite, după cum*

$$\frac{3-8\sqrt{8}}{3+8\sqrt{8}} < f(a, b, c) < \frac{-3+8\sqrt{8}}{3+8\sqrt{8}}$$

sau

$$\frac{-3+8\sqrt{8}}{3+8\sqrt{8}} < |f(a, b, c)| < 1.$$

In primul caz lanțul cuprinde două triunghiuri eliptice de prima speță consecutive, două triunghiuri eliptice de a doua speță opuse și două triunghiuri iperbolice consecutive.

In al doilea caz lanțul cuprinde două triunghiuri consecutive eliptice de prima speță urmate de un triunghiu eliptic de a doua speță și trei triunghiuri iperbolice.

7°. *Natura triunghiurilor pseudo-isoscele iperbolice.*

Teorema precedentă, satisfăcătoare din punct de vedere analitic, are totuși, din punct de vedere geometric o lipsă: triunghiurile pseudo-isoscele iperbolice nu au o reprezentare concretă. Ne propunem să împlinim lipsa aceasta.

Să considerăm baza BC a unui astfel de triunghiu. Un punct A de cotă pur imaginară față de dreapta BC poate fi înlocuit, potrivit principiului proiecției minimale cu semicercul, situat de o anume parte a lui BC, descris din proiecția D, a lui A pe BC, ca centru, cu

$$\sqrt{-1}\,AD$$

ca rază.

Incât un triunghiu de bază $a = BC$ și laturi b, c, care nu satisfac la condiția (4) de închidere, — așa dar un triunghiu iperbolic, — se reprezintă prin vârfurile B, C și semicercul $\mathcal{A}$ ortogonal cercurilor descrise din centrele B, C, respectiv cu razele c, b și ortogonal în același timp dreptei BC.

Toate punctele A* de cotă pur imaginară de pe dreapta AB (sau AC) se reprezintă prin semicercuri $\mathcal{A}^*$ ortogonale dreptei BC și care admit cu $\mathcal{A}$ o tangentă comună ce trece prin B (sau C). Distanța BA* (sau CA*) se dovedește reală și egală anume cu segmentul de tangentă comună măsurat dela B (sau C) până la contactul cu semicercul $\mathcal{A}^*$.

Incât o dreaptă BC (sau CA) conținând un punct A de cotă pur imaginară e complect reprezentată prin tangenta BX (sau CY) comună tuturor semicercurilor $\mathcal{A}^*$.

Prin unghiu făcut de dreapta BA de exemplu, cu baza BC înțelegem unghiul B definit de

$$\operatorname{tg} h\,\mathrm{B} = \frac{\sqrt{-1}\,\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}.$$

Dacă $\overline{\mathrm{B}}$ e unghiul obișnuit făcut de tangenta BX cu BC se vede că avem relația

$$\operatorname{tg} h\,\mathrm{B} = \sin \overline{\mathrm{B}}.$$

Așa fiind, definim ca bisectoare a lui $\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}$ dreapta imaginară[1]) dusă prin B a cărei tangentă reprezentativă BX′ face un unghiu $\overline{\mathrm{B}_1} = \overset{\frown}{\mathrm{X'BC}}$ definit de

$$\sin \overline{\mathrm{B}_1} = \operatorname{tg} h \frac{\mathrm{B}}{2}.$$

Avem două astfel de bisectoare.

Prin segmentul β de bisectoare limitat la latura AC se înțelege aici segmentul

$$\beta = \mathrm{BB'}$$

de pe BX′, unde B′ e contactul lui BX′ cu semicercul $\mathfrak{B}$ ortogonal lui BC și tangent lui BX′ și CY.

Incât avem definiția:

Un triunghiu iperbolic de vârfuri B, C *și de cerc ortogonal* $\mathcal{A}$ *se numește pseudo-isoscel când, însemnând cu* $\overline{\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{C}}$ *unghiurile făcute de tangentele prin* B, C *cu baza și punând:*

$$\operatorname{tg} h\,\mathrm{B} = \sin \overline{\mathrm{B}} \quad , \quad \operatorname{tg} h\,\mathrm{C} = \sin \overline{\mathrm{C}}$$

$$\operatorname{tg} h \frac{\mathrm{B}}{2} = \sin \overline{\mathrm{B}_1} \quad , \quad \operatorname{tg} h \frac{\mathrm{C}}{2} = \sin \overline{\mathrm{C}_1}$$

dreptele BX′, CY′ *determinate de unghiurile* $\overset{\frown}{\mathrm{X'BC}} = \mathrm{B}_1$ *și* $\mathrm{Y'CB} = \mathrm{C}_1$

---

1) Aceasta înseamnă aici: dreaptă care conține ∞^1 puncte de cotă pur imaginară.

sunt astfel încât, semicercurile $\mathfrak{B}$ *şi* $\mathfrak{C}$ *ortogonale lui* BC *şi tangente respectiv lui* BX', CY *şi* CY', BX *au faţă de* B *şi* C *aceeaşi putere.* Aici BX şi CY înseamnă tangentele duse prin B şi C la semicercul $\mathfrak{A}$.

Cu aceasta teorema din alineatul precedent capătă un conţinut intuitiv.

D. BARBILIAN.

NOTE MATEMATICE

12. *Teoreme de aritmet.că.* 1°. Dacă

$$x^2 = y^2 + z^2 \qquad (1)$$

iar y *şi* z *sunt prime între ele, atunci* x *este suma a două patrate.*

Soluţiile întregi ale ecuaţiei (1) fiind

$$\alpha^2 + \beta^2 \quad , \quad \alpha^2 - \beta^2 \quad , \quad 2\alpha^2\beta^2$$

unul din numerele y, z este neapărat pereche. Punând $z = 2m$, avem

$$x^2 - y^2 = 4m^2. \qquad (2)$$

Numerele x şi y fiind de aceeaşi paritate, (2) atrage

$$x + y = 2p \quad , \quad x - y = 2q \quad \therefore \quad pq = m^2.$$

Dar y şi z fiind primi între ei, x şi y vor fi de asemeni primi între ei ca şi p cu q aşa încât p şi q sunt neapărat patrate perfecte. Putem deci scrie

$$p = a^2 \quad , \quad q = b^2 \quad \therefore \quad x = p + q = a^2 + b^2$$

ceea ce demonstrează teorema.

V. THÉBAULT.

13. *Asupra numerelor amiabile.* Matematicianul arab despre care pomeneşte D-l I. IONESCU în G. M., Anul L, pag. 72, ar putea să fie THABIT BEN KORRAH, vestit geometru, care a trăit către sfârşitul sec. IX.

El a dat şi o regulă pentru formarea numerelor amiabile, regulă ce se traduce prin formulele:

$$2^n(3.2^n - 1)(3.2^{n-1} - 1) \quad \text{şi} \quad 2^n(9.2^{n-1} - 1),$$

factorii din parenteze fiind numere prime. Am găsit aceasta în J. DUPUIS, *„Tables de Logarithmes à cinq décimales"*, 32-ème édition page 180.

P. P. DRĂGHICESCU.

14. *Asupra problemei 2585. Enunțul problemei este*: *Punctele* P, P′ *sunt așezate oricum pe două sfere concentrice. Dacă* A, B *și* A′, B′ *sunt două perechi de puncte diametral opuse pe cele două sfere, atunci*

$$\overline{P'A}^2 + \overline{P'B}^2 = \overline{PA'} + \overline{PB'}^2.$$

Iată o soluție diferită de cea dată în „*Gazeta Matematică*“, Vol. XLV, pag. 35. Se observă că OP′ este mediană în triunghiul P′AB și OP este mediană în triunghiul PA′B′. Deci dacă R, R′ sunt razele celor două sfere, avem

$$\overline{P'A} + \overline{P'B}^2 = 2\overline{OP'} + \frac{\overline{AB}^2}{2} = 2(R^2 + R'^2)$$

$$\overline{PA'}^2 + \overline{PB'}^2 = 2\overline{OP}^2 + \frac{\overline{A'B'}^2}{2} = 2(R^2 + R'^2).$$

Proprietatea rezultă din compararea acestor două egalități.

S-LT M. D. POPA.

15. *Asupra problemei 5603* (G. M. XLVIII, 42). In această problemă se presupune că explozia proiectilului are drept efect numai spargerea proiectilului, fără să imprime schijelor niciun fel de viteză.

Presupunând însă, așa cum se petrece în realitate fenomenul, că explozia va imprima celor trei schije și câte o viteză V_1, V_2, V_3 dirijate după anumite direcții, atunci problema se complică.

Astfel presupunem că V_1 este orizontal și în sensul pozitiv, V_2 este vertical și negativ, rămâne să deducem pe V_3.

In acest caz, la coordonatele problemei 5603 vom adăoga: $V_1 . t$ pentru x_1, $V_2 . t$ pentru y_2, iar coordonatele vor fi:

$$x_3 = \left(\frac{P - P_1}{P_3} . V_0 . \cos\alpha - \frac{P_1}{P_3} . V_1\right) . t - \frac{P_2}{P_3} . \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$y_3 = (V_0 \sin\alpha + V_2) . t - \frac{1}{2} gt^2.$$

Apoi vitesa V_3 va avea componentele:

$$(V_3)_x = \frac{dx_3}{dt} \quad \text{și} \quad (V_2)_y = \frac{dy_3}{dt}.$$

COMANDOR I. LINTEȘ.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Politechnicei din Bucureşti. Anul XIV. 1943. Nr. 3—4. N. RACLIŞ : Lemmes pour le théorème de FERMAT. A. STOENESCU : Sur les systèmes de forces sous l'action desquelles un mobile parcourt une trajectoire donnée. GABRIELA ŢIŢEICA : Détermination par une méthode graphique des rayons de courbure des trajectoires initiales d'un certain système de points en mouvement. M. D. ILIE : Contributions à la connaissance de la structure géologique des Carpates roumains. C. C. GEORGESCU şi P. CREŢOIU : Zur Kenntnis der Eichenformen des Bezirkes Cernăuţi. M. BADEA şi P. CREŢOIU : Neue Fundorte für einige seltene Orchideen aus Rumänien. GH. CARTIANU : Les conditions d'équivalence d'un circuit électrique avec une couche de dipôles magnétiques. D. PAVEL : Zur Berechnung der Tide-Kraftwerke. M. GH. MARINESCU : Amplificateurs électroniques et phénomènes déformants. I. LINTEŞ : Sur la balistique des lances-flammes. V. MARCU : Influence de la vitesse des avions sur la puissance des moteurs. M. POPESCU : Contributions à l'étude des causes qui produisent les ruptures des avions en vol. I. CÂRSTOIU : Sur la dynamique de l'avion. TH. GH. ONIGA : Considérations sur le bombardement en piqué.

Bulletin Séismique. Vol. IX. 1943, publié par G. DEMETRESCU et G. PETRESCU.

Disquisitiones Mathematicae et Physicae. Tomus II. Fasc. 2—3. Imprimeria Naţională, Bucureşti 1942. T. POPOVICIU : Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (IV). G. CĂLUGĂREANU : Sur les invariants topologiques attachés aux courbes et surfaces fermées. P. POPOVĂŢ : Sur les régions de monovalence des fonctions rationnelles. G. VRÂNCEANU : Sur les invariants des espaces de RIEMANN singuliers. R. ROŞCA : Sur certaines classes de congruences W de l'espace elliptique. E. C. G. STUEKELBERG VON BREIDENBACH : La notion de temps. YVETTE CAUCHOIS : Remarques sur « *l'anomalie* » des absorptions M.

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXIV. Nr. 9. Noembrie 1944. I. V. MĂTIEŞ : Cuburi isofinale (urmare). Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

România Aeriană. Anul XVIII. Nr. 7—8. Iulie-August 1944. M. S. REGINA MARIA : Paseri fantastice pe albastrul cerului. E. DIACONESCU-ARNOU : Aviaţia comercială. RUXANDRA OTETELEŞANU : Luptă în avion. GH. POPESCU-BOTOŞANI : Aviaţie şi progres. VALENTIN POPESCU : Planorul de transport în slujba păcii. I. VAL. POPA : Evenimente aeronautice în renaştere. *** : Autogirul KELLETT KD 1B. Rep. : Formalităţile pe care urmează să le îndeplinească sinistraţii de pe urma bombardamentelor aeriene. *** : Cum ne apărăm împotriva avioanelor care mitraliază la sol. *** : Bimotorul de transport Lockheed 18 „Lodestar". *** : Aviaţia la noi. Aviaţia în alte ţări.

GENERALUL ST. BURILEANU : Curs de mecanică raţională, predat la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj. Vol. I. Cinematica. Bucureşti. Atelierele Grafice Socec & Co. 1944.

GENERALUL ST. BURILEANU : Curs de mecanică raţională, predat la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj. Vol. II. Dinamica. Bucureşti. Atelierele Grafice Socec & Co. 1944.

V. VÂLCOVICI : Sur la distribution *des axes principaux* d'inertie (Extr. din „Mathematica" XX (1944). pp. 113—136).

GHEORGHE VRÂNCEANU. *Curs de Geometrie analitică şi proiectivă* Vol. I. Secţiuni Conice, Curbe, Plane. Bucureşti, Göbl. 1944.

Când un matematician de prima mână se hotăreşte să publice un tratat elementar, nu numai învăţământul dar şi ştiinţa sunt beneficiarele acestui eveniment. Astfel *„Lecţiile de Geometrie"* ale lui JACQUES HADAMARD, scrise pentru iniţierea matematică a copiilor săi, au devenit curând clasice. Cât priveşte nota asupra poliedrelor regulate, ea e considerată ca o adevărată contribuţie ştiinţifică : e citată la pag. 93 şi 202 în *Teoria Funcţiunilor Automorfe* a lui PIERRE FATOU. De asemenea conferinţele lui FELIX KLEIN la cursurile de vară ale profesorilor secundari germani, publicate sub titlul de *„Elementarmathematik von einem höheren Standtpunkt aus"*, s'au dovedit un adevărat repertoriu al ideilor matematice generatoare din secolul al XIX şi pot fi citite cu folos de orice matematician.

D-l G. VRÂNCEANU este creatorul teoriei spaţiilor ne-olonome şi ca atare, intrat de mult în acea corporaţie a geometrilor deschizători de drumuri, ermetică şi restrânsă ca un club englez. Am răsfoit deci cu îndreptăţită curiozitate *„Cursul de Geometrie analitică şi proiectivă"*, pe care a găsit nimerit nu numai să-l profeseze, dar să-l şi publice.

Să spunem numaidecât că bogăţia materiei şi marile calităţi didactice îl recomandă (mai ales astăzi, când cărţile străine sunt imposibil de găsit sau de adus în ţară) unui public foarte variat : elevi ai claselor speciale de matematice, corespondenţi ai *„Gazetei Matematice"*, politehnicieni, studenţi ai Facultăţilor de ştiinţe. Dar poate interesa deopotrivă şi pe matematicieni.

Ştiu că există cărţi matematice în româneşte, cu un subiect asemănător şi cu însuşiri certe. Dar cărţile pe care le cunoaştem sacrifică, mi se pare, linia întregului unei griji pedante pentru amănunt. Autorii se lasă dominaţi de material, în vreme ce D-l VRÂNCEANU se mişcă prin varietatea considerabilă a temelor cu o libertate suverană. Formulele sunt reduse la un strict necesar, elegante, în conciziunea lor. Recunoaştem stilul lucrărilor ieşite din şcoala lui LEVI-CIVITA, maestrul D-lui VRÂNCEANU.

Ceea ce ni se pare fără putinţă de tăgăduire nou, pentru o carte românească de geometrie, e deosebirea pe care autorul o face (nu explicit, dar vizibil) între geometria analitică, adică metoda coordonatelor şi geometria euclidiană sau geometria proiectivă în tratament analitic : *corpuri închise de cunoştinţe*. Trebuia un veritabil matematician, pentru a risipi odată echivocul existent încă în publicul matematic mare, anume confuzia între stilul algoritmic de o parte şi conţinutul geometric, de alta.

Cursul se deschide cu o privire asupra desvoltării istorice a geometriei. Intrarea în materie se face prin introducerea noţiunii de *coordonată : metrică, afină, proiectivă.* Aşa dar expunerea urmăreşte (aşa cum se cuvine unei cărţi didactice) procesul cronologic, nu logic, al abstracţiunilor geometrice şi se desfăşoară pe un fond euclidian de certitudini, la care autorul adaugă, firește, un fond aritmetic: structura conţinutului matematic.

Urmează un studiu adâncit al *grupului proiectiv pe o dreaptă* sau pe un fascicol linear de drepte. Aici se aşează *teorema lui* LAGUERE a unghiului. Se trece apoi la generarea sintetică, datorită lui STEINER, a *diviziunilor proiective şi perspective.*

Inchiderea planului afin cu elemente improprii până la organizarea acestuia ca plan proiectiv, *ordonarea,* în planul astfel constituit a *punctelor absolute,* vădeşte preocuparea autorului de a moderniza prezentarea relaţiilor dintre principalele trei moduri de coordonare şi a separa net *momentul afin* de *momentul proiectiv,* cu întoarcerea, apoi, către momentul iniţial, *euclidian.*

Capitolele care vin constitue materia clasică a geometriei analitice cu două dimensiuni: *aplicaţiile metodei coordonatelor la cercetarea proprietăţilor metrice ale cercului, elipsei, parabolei, iperbolei,* materie care în cea mai mare parte reprezintă cursul de altă dată al profesorului ŢIŢEICA. Trebue să admirăm cum D-l VRÂNCEANU reuşeşte în mânuirea acestei materii ingrate, să rămână simplu şi esenţial.

O menţiune specială se cuvine capitolului *despre cercuri,* în care autorul, fără să stărue prea mult, schiţează în realitate o introducere la *Geometria Anallagmatică.*

Se trece apoi la proprietăţile proiective ale conicelor : *fascicole lineare, teorema lui* DESARGUES, *a involuţiei, familii lineare de conice, teoremele* PASCAL *şi* BRIANCHON.

Pentru prima oară într'un curs publicat în românește, atenţia cetitorului e îndreptată asupra importanţei axiomatice o unor teoreme, fără mare interes în sine, cum este teorema lui PAPPUS (cunoscută mai mult ca teoremă a lui PASCAL). Regretăm că ocazia nu s'a prezintat, ca autorul să fi pus în aceeaşi lumină teorema triunghiurilor omologice a lui DESARGUES.

Sunt studiate apoi *proiectivităţile pe o conică şi grupul proiectiv ternar,* cu reprezentările lui prin colineaţiie şi corelaţiile planului In acest cadru al geometriei proiective plane, se situează apoi geometria afină, geometria asemănărilor şi geometria isometriilor. Capitolul poate fi considerat ca o introducere la *programul dela Erlangen, al lui* KLEIN.

Un ex-curs în *geometria algebrică,* în *calculul tensorial,* în *teoria curbelor continue* şi în *metoda reperului mobil* (aplicată la curbele din planul euclidian) termină cartea. După cum vedem, autorul, ca pedagog experimentat, nu ţinteşte deloc la complectitudine. Are însă grija să lase pe ramura principală a expunerii sale, unii muguri, unele virtualităţi, pentru eventuale prelungiri lăsate în seama cetitorului.

Capitolele sunt urmate de exerciţii numeroase, dintre care, unele, adevărate complemente ale teoriilor din curs.

Am de făcut o rezervă de ordin secundar, cu privire la această primă ediţie. Unii termeni tehnici nu sunt fixaţi. Astfel, dreptele isotrope sunt numite câte odată drepte ciclice. Ar trebui să ne menţinem în această privinţă, la nomenclatura cea mai îndreptăţită: „drepte minimale" şi „puncte absolute". Iarăşi, invariantul de apolaritate, e numit într'un caz particular „armonizatorul". Dar această critică în realitate, trebue extinsă întregei literaturi matematice româneşti. Aşteptăm încă „*Vocabularul Matematic*" pe care Secţia ştiinţifică a Academiei Române l-a pus în lucru, pentru a introduce uniformitate în acest domeniu controversat.

In sfârşit, exprim aici o dorinţă personală: s'ar fi cuvenit, poate, o mai mare desvoltare teoriei invarianţilor proiectivi ai formelor pătratice ternare.

Aşteptând volumul II, încheiu această lungă recenzie. Insă apariţia unei cărţi de o ţinută ştiinţifică desăvârşită şi răspunzând unei nevoi didactice aşa de mult simţite, trebuia subliniată în mod deosebit.

D. BARBILIAN.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

GENERALUL ST. BURILEANU. Curs de mecanică raţională, predat la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj. Vol. I: Cinematica. Vol. II: Dinamica.

PROF. GH. VRÂNCEANU. Curs de Geometrie Analitică şi Proiectivă. Vol. I.

Donate de autori.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1591. *Se dau două puncte fixe* A, B *şi un punct mobil* C *pe o dreaptă dată* AX. *Se ia pe* AB *o lungime* BD = AC *şi prin* D *se duce o dreaptă care taie pe* BC *în* M *sub un unghiu* $\sphericalangle$ BMD = $\sphericalangle$ BAC.

Să se găsească locul punctului M.

M. RADU.

I. In enunţ nu se precizează sensurile lungimilor şi al unghiurilor; la fiecare punct C pe AX se pot lua două puncte D pe AB simetrice faţă de B, să le numim D^+ şi D^-, şi din fiecare punct D se pot duce câte două drepte înclinate pe BC de unghiu $\sphericalangle$ BAC, fie M_1 şi M_2 intersecţiile lor cu BC.

Pentru a rezolva complect problema, introducem inițial, o orientare — obținând unicitate și continuitate și o discuție — distingând când și în ce condiții ambele puncte M satisfac enunțului.

II. Adoptăm un sistem de coordonate polare de pol B și de axă polară Bx determinată ca direcție și sens de $\overline{BA}$, astfel că B $(0, 0)$, A $(a, 0)$. Fie $w = (Bx, \overline{BC})$ unghiul polar și $\alpha = (Bx, \overline{AX})$ unghiul constant din enunț, căruia îi atribuim astfel un sens pozitiv. Fie l distanța orientată $\overline{AC}$.

Cu acestea, ecuația dreptei $\overline{AX}$ este:

$$\overline{BC} = \rho = -a\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)} \tag{1}$$

și deoarece în triunghiul BAC:

$$\overline{AC} = \rho\frac{\sin\omega}{\sin\alpha}, \tag{2}$$

rezultă:

$$\overline{AC} = l = -a\frac{\sin\omega}{\sin(\omega - \alpha)}. \tag{3}$$

Convenim deci să luăm $\overline{BD}^{+} = \overline{AC} = l$, astfel încât, pentru moment, *punctul* D *e unic determinat* pe axa Bx, și avem următorul tablou de variație:

ω	0		α		π		$\alpha+\pi$		2π
$\overline{BD} = l$	0	$+\infty$		$-\infty$	0	$+\infty$		$-\infty$	0

(4)

De unde se vede că *esențial este intervalul* $0 - \pi$ în care e de ajuns să considerăm punctul D. In acest interval D acoperă în mod unic întreaga axă Bx. Construcția — și deci locul căutat — se reproduce în intervalele următoare de amplitudine π.

La fiecare punct D corespund punctele M_1 și M_2 astfel că DM_1 și DM_2 să fie înclinate de unghiu $\sphericalangle BAC = \pi - \alpha$ pe BC, dar pentru a preciza introducând și aci o orientare, determinăm punctele M_1 și M_2 cu egalitățile de unghiuri orientate, următoare:

$$(\overline{M_1D}\ ,\ \overline{BC}) = (\overline{BC}\ ,\ \overline{DM_2}) = \alpha. \tag{5}$$

In acest mod distincția între locul lui M_1 *și al lui* M_2 *este asigurată.*

Dar nu pentru oricare BC, ambele puncte M_1 şi M_2 satisfac condiţiei din enunţ de a avea $\sphericalangle BMD = \sphericalangle BAC$. Pentru aceasta şi observând că figura comportă trei cazuri după valorile unghiului constant α, formăm următoarele trei tablouri:

pentru	w	0	$\pi-\alpha$	α	π
$\alpha > \frac{\pi}{2}$:	$\overset{\frown}{BM_1D}$	$\overset{\frown}{BAC}$		$\overset{\frown}{BAC}$	$\pi-\overset{\frown}{BAC}$
	$\overset{\frown}{BM_2D}$	$\pi-\overset{\frown}{BAC}$		$\overset{\frown}{BAC}$	$\overset{\frown}{BAC}$

pentru	w	0	α	$\pi-\alpha$	π
$\alpha < \frac{\pi}{2}$:	$\overset{\frown}{BM_1D}$	$\overset{\frown}{BAC}$	$\pi-\overset{\frown}{BAC}$	$\pi-\overset{\frown}{BAC}$	
	$\overset{\frown}{BM_2D}$	$\pi-\overset{\frown}{BAC}$	$\pi-\overset{\frown}{BAC}$	$\overset{\frown}{BAC}$	

(6)

pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$:	w	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$M_2 \equiv M_1$	$\overset{\frown}{BM_1D}$	$\overset{\frown}{BAC}$		$\overset{\frown}{BAC}$

Din primele două tablouri se vede că în ambele cazuri: *locul lui* M_1 *răspunde condiţiilor problemei în intervalul* $0 - \alpha$, *iar locul lui* M_2 *în intervalul* $(\pi - \alpha) - \pi$.

Aceste intervale interferează pentru $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

Ultimul tablou arată că, M fiind unic, întregul loc răspunde condiţiilor problemei.

III. Să determinăm acum locurile geometrice ale lui M_1 şi M_2 pentru unghiul α şi w oricare, dat fiind precizările dela (4) şi (5).

1. Pentru locul lui M_1 observăm că din asemănarea triunghiurilor BDM_1 şi BCA

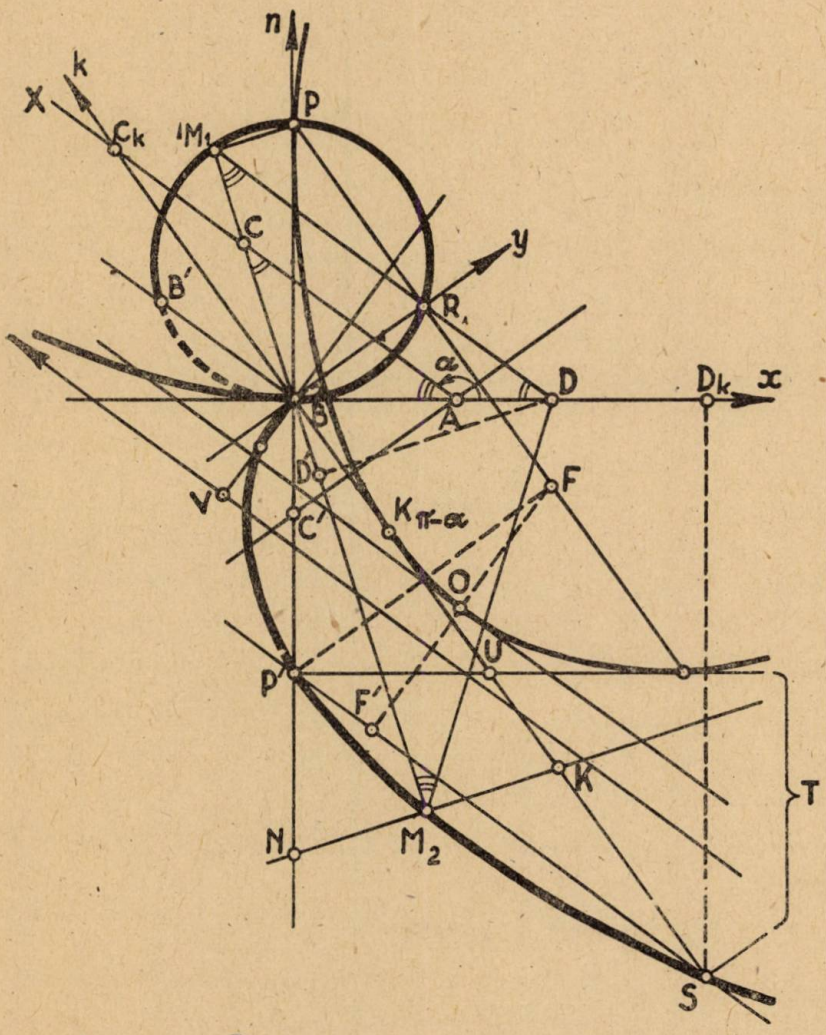
$$\frac{\overline{BM_1}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \tag{7}$$

în care ţinând seama de formulele (1) şi (3) găsim:

$$\overline{BM_1} = \rho_1 = a\,\frac{\sin\omega}{\sin\alpha}. \tag{8}$$

Deci *locul lui* M_1 *este un cerc tangent în* B *la* Bx *şi de rază* $\frac{a}{2\sin\alpha}$ şi din care răspunde problemei, conform primelor

două tablouri (6), arcul începând din B în sens pozitiv până în B', a doua intersecție a paralelei din B la AX. Acest arc cuprinde sau nu punctul P diametral opus al lui B după cum $\alpha \gtrless \frac{\pi}{2}$.



Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ întreg cercul răspunde problemei, raza fiind atunci $\frac{a}{2}$. El este în același timp și locul lui M_2 care în acest caz se confundă cu M_1.

2. Pentru locul lui M_2, observăm că asemănarea triunghiurilor BDM_2 şi $BC'A$, unde C' e intersecţie cu BC a dreptei dusă prin A şi înclinată ce unghiu $\pi - \alpha$ pe Bx, dă

$$\frac{\overline{BM_2}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC'}}. \tag{9}$$

Apoi din triunghiul BC'A:

$$\frac{a}{\sin(\omega + \alpha)} = \frac{\overline{BC'}}{\sin\alpha} \tag{10}$$

şi ţinând seama de formula (3) rezultă din (9):

$$\overline{BM_2} = \rho_2 = -a\frac{\sin\omega \sin(\omega + \alpha)}{\sin\alpha \sin(\omega - \alpha)}. \tag{11}$$

Deci *locul lui* M_2 *este o cubică circulară unicursală având punctul dublu în* B cu tangentele Bx şi By care fac unghiul $\pi - \alpha$ cu Bx, având ca direcţie asimptotică pe AX; iar ca asimptotă o paralelă la AX având ordonata la origina B dată de:

$$d = \lim_{\omega=\alpha} Y = \lim_{\omega=\alpha} \rho_2 \sin(\omega - \alpha) \tag{12}$$

adică:

$$d = -a \sin 2\alpha. \tag{13}$$

Se vede uşor că punctul P' simetricul lui P faţă de B aparţine acestei cubice, căci P şi P' sunt respectiv M_1 şi M_2 pentru BC confundată cu Bn perpendiculara în B pe Bx.

Cubica e aşezată diferit pentru $\alpha \gtrless \frac{\pi}{2}$, anume pentru unghiuri α suplimentare e simetrică faţă de axa Bn. Incât ω variind dela 0 la π punctul M_2 parcurge cubica astfel, ordinea literelor (sau tangentelor) indicând sensul:

pentru $\alpha > \frac{\pi}{2}$: bucla dela $\overline{Bx}$ la $\overline{By}$, arcul $BP'\infty$, arcul ∞B

pentru $\alpha < \frac{\pi}{2}$: arcul $B\infty$, arcul $\infty P'B$, bucla dela $\overline{By}$ la $\overline{Bx}$.

Dintre aceste arcuri aparţin locului cerut de problemă, conform tablourilor (6) astfel:

pentru $\alpha > \frac{\pi}{2}$: arcul $BP'\infty$, arcul ∞B

pentru $\alpha < \frac{\pi}{2}$: bucla dela $\overline{By}$ la $\overline{Bx}$.

3. Formăm deci următoarele 2 tablouri rezumative:

	ω	0	$\pi-\alpha$	α	π
$\alpha > \frac{2}{\pi}$	locul (M_1) cerc	arcul BPB′		|	
	locul (M_2) cubic. circ. unic		| arcBPB′∞	⋮ arc ∞B	|

(14)

		0	α	$\pi-\alpha$	π
$\alpha < \frac{2}{\pi}$	locul (M_1) cerc	arcul BB′ |			
	locul (M_2) cubic. circ. unic			| bucla $(\overline{By}, \overline{Bx})$ |	

Revenind la faptul că la fiecare punct D se poate considera şi simetricul său D^- faţă de B, de unde rezultă punctele M_1^- şi M_2^- construite pe BC cu formulele (5) şi deci simetricele respectiv ale lui M_1 şi M_2 faţă de B şi răspunzând în acelaşi timp cu acestea condiţiilor problemei.

Incât locul se complectează cu simetricele arcurilor de cerc şi cubică precizate mai sus, faţă de B, *respectiv în cele două cazuri.*

IV. Problema are şi o soluţie geometrică, imediată în ce priveşte cercul, mai ascunsă pentru cubică, dar această soluţie face să apară atât cercul cât şi cubica, ca *podare ale punctului* B respectiv faţă de un punct şi de o parabolă.

1°. Perpendiculara în M_1 pe BC taie perpendiculara B*n* în B pe B*x* într'un punct P. Din asemănarea triunghiurilor DD′B şi BM_1P avem:

$$\frac{\overline{BM_1}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{DB}}. \tag{15}$$

de unde:

$$\overline{BP} = \frac{a}{\sin\alpha} = \text{const.} \tag{16}$$

Deci punctul P fiind fix, M_1 *descrie cercul de diametru* BP care apare astfel ca *podara* lui B faţă de punctul P (privit ca curbă de clasa 1).

2°. Perpendiculara în M_2 pe BC taie pe Bn în N. Fie Bk perpendiculara în B pe By şi dirijată astfel ca unghiul (By, Bk) să fie pozitiv. Dreapta M_2N taie axa Bk într'un punct K. Din triunghiul BNK avem:

$$\frac{\overline{BN}}{\sin(\omega+\alpha)} = \frac{\overline{Bk}}{\sin\omega} \tag{17}$$

iar din asemănarea triunghiurilor BM_2N şi DD'B avem:

$$\frac{\overline{BM_2}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{DB}} \tag{18}$$

$$\therefore \quad \overline{BN} = -a\frac{\sin(\omega+\alpha)}{\sin\alpha\sin(\omega-\alpha)} \tag{19}$$

sau:

$$\overline{BN} = -\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}\omega+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}\alpha}. \tag{20}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{-\overline{BN}\sin\alpha + a}{-\overline{BN}\sin\alpha - a}\operatorname{tg}\alpha \tag{21}$$

care dusă în (17) scrisă sub forma:

$$\overline{BN} = \overline{BK}\cos\alpha(\operatorname{cot}\omega\operatorname{tg}\alpha+1), \tag{22}$$

dă în definitiv:

$$2\overline{BK}\cos\alpha\sin\alpha - \overline{BN}\sin\alpha + a = 0. \tag{23}$$

Această relaţiune arată că între punctele N şi K pe axele Bn şi Bk există o *corespondenţă omografică de gen parabolic.* Deci dreapta NK înfăşoară *o parabolă* tangentă la Bn şi Bk respectiv în punctele P şi $K_{\pi-\alpha}$ căci:

pentru $K\to B$ din (23) rezultă $BN_0 = \frac{\sin\alpha}{a}$, adică $N_0 \equiv P$,

pentru $N\to B$ din (23) rezultă $BK_{\pi-\alpha} = -\frac{a}{\sin 2\alpha}$.

Deci punctul M_2 care e proiecţia lui B pe tangentele NK la această parabolă, descrie *podara* punctului B faţă de parabolă, adică o *cubică circulară.*

Punctul dublu al cubicei e B în care tangentele sunt perpendicularele Bx şi By respectiv pe Bn şi Bk, tangentele din B la parabolă. Asimptota cubicei e paralelă cu directoarea parabolei.

Pentru a construi directoarea parabolei observăm că: pentru BC confundată cu Bn, punctul M_2 vine în P′ astfel că dreapta NK devine perpendiculara în P′ pe Bn, deci P′ e un punct al directoarei. Iar pentru BC confundată cu Bk avem:

$$\overline{AC}_k = \overline{BD}_k$$

și pentrucă $\sphericalangle ABK_{\pi-\alpha} = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BAC$, punctul M_2 se obține la intersecția S a lui Bk cu perpendiculara în D_k pe Bx. Dreapta NK devine perpendiculara în S pe Bk. Deci S e un punct al directoarei parabolei. Avem:

$$BS = \frac{BD_k}{\sphericalangle \sin BAC} = \frac{AC_k}{\sphericalangle \sin BAC}$$

pe de altă parte:

$$BP' = \frac{BA}{\sphericalangle \sin BAC}.$$

Din acestea rezultă că triunghiurile BP′S și ABC_k sunt asemenea, deci rezultă:

$$\sphericalangle BP'S = ABC_k = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle BAC$$

adică P′S *e directoarea parabolei și e paralelă cu* AX.

Pentru construirea focarului parabolei, fie T intersecția perpendicularei în P′ pe Pn și a perpendicularei în S pe Bk. Fie U intersecția (P′T, BS). Focarul parabolei este a doua intersecție F a cercurilor (BP′U) și (UST). Pentrucă triunghiurile BP′U și UST sunt dreptunghice respectiv în P′ și S centrele cercurilor circumscrise sunt mijloacele segmentelor BU și UT, rezultă că a doua intersecție a acestor cercuri, adică *focarul* F *al parabolei e proiecția punctului* U *pe dreapta* BT.

Observăm că $\sphericalangle TBS = \sphericalangle TP'S = \sphericalangle BAC = \sphericalangle P'BU$, deci F e simetricul lui P′ față de BS încât:

$$P'F = 2a \qquad (24)$$

şi pentrucă $\sphericalangle FP'S = \sphericalangle BAC$, iar F' fiind proiecţia lui F pe directoarea P'S; rezultă din triunghiul FF'P', că *parametrul parabolei* este:

$$p = FF' = 2a \sin 2 \sphericalangle (BAC). \qquad (25)$$

Cu acestea şi ştiind că distanţa dela punctul dublu la asimptota cubicei circulare unicursale, podară a punctului dublu faţă de o parabolă este egală şi paralelă cu semiparametrul parabolei (CHARLES MICHEL: *Compl. de Géom. Mod., Vuibert 1926, pag. 64*); construcţia asimptotei cubicei din cazul nostru e imediată, luăm:

$$\overline{BV} = \overline{FO} = a \sin 2 (\sphericalangle BAC) \qquad (26)$$

O fiind vârful parabolei, încât *paralela prin* V *la* AX *este asimptota căutată.*

ADRIAN GHEORGHIU.

Notă. Problema a fost propusă în Sept. 1910. Unii din corespondenţii cari s'au ocupat pe vremuri de această problemă sunt astăzi profesori universitari, membri ai societăţii *„Gazeta Matematică"*, ingineri, ofiţeri superiori, etc. Pentru istoric, îi citâm în ordinea volumelor în care numele le sunt anunţate pe copertă, fără a putea preciza dacă soluţiile pe care le-au trimis au găsit locul complect, adică cercul şi cubica din soluţia redijată recent de colegul de societate D-l AD. GHEORGHIU, întru cât soluţiile d-lor au fost rătăcite din cauza împrejurărilor. S'au primit soluţii:

In anul 1910—11, Vol. XVI dela N. BLAHA, E. CARAMAN, S. COŢIFIDE, G. DĂNULESCU, M. DULCESCU, D. DUMITRIU, A. GAVRILESCU, ELENA GEORGESCU, I. GHIGULESCU, M. GRÜNBERG, C. MIHĂESCU, C. MIRCEA, V. MIRONESCU, M. NICOLAU, ST. OPRESCU, A. PANĂ, I. PÂRVU, I. PLĂCINŢEANU, C. C. POPOVICI, M. PORTOCALĂ, E. SAEGIU, V. SĂVESCU, A. SELAGIAN, G. TULEA, B. VECSLER, E. VASILIU.

In anul 1911—12, Vol. XVII, dela: A. ANAGNOSTE, I. BĂLAN, I. A. BARBAIANI, D. BARBILIAN, R. CHRISTODULO, P. DIDICESCU, I. FUNDĂŢIANU, E. MIRCEA, V. MANOILESCU, S. PAŞCANU, G. TULEA, C. ULIC.

In anul 1912—13, Vol. XVIII dela: C. ALINESCU, D. BARBILIAN, AL. GHEOCALESCU, ŞERB. GHEORGHIU, C. PANĂ, AL. STOICA.

In anul 1913—14, Vol. XIX, dela: D. LEFTER, P. PANAITOPOL, AL. STOICA, GR. ZAMFIRESCU.

In anul 1927—28, Vol. XXXIII dela: UL. M. FLORESCU.

In anul 1928—29, Vol. XXXIV dela: GH. TH. GHEORGHIU.

In anul 1939—40, Vol. XLV dela: AL. N. POPESCU-ZORICA.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4853. *Fie* N *şi* T *punctele în care normala şi tangenta unei spirale logaritmice taie perpendiculara din origină pe raza vectoare,* N′ *şi* T′ *respectiv proiecţiile originei şi mijlocului segmentului* NT *pe normală şi tangentă.*

Să se arate că locul geometric al intersecţiei dreptelor NT′, N′T *este de asemenea o spirală logaritmică.*

C. IONESCU-BUJOR.

Se ia origina axelor de coordonate dreptunghiulare în O, (r, θ) coordonatele polare ale unui punct curent M al spiralei logaritmice

$$r = ae^{m\theta}.$$

Deoarece

$$\frac{\overline{N'M}}{\overline{N'N}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{ON}},$$

avem

$$\frac{\overline{N'M}}{\overline{N'N}} \cdot \frac{\overline{ON}}{\overline{OT}} \frac{\overline{T'T}}{\overline{T'M}} = -1.$$

Deci NT′, N′T concură pe OM, în punctul P.

Vom calcula segmentul OP. Pentru aceasta, faţă de această poziţie a lui M, luăm un sistem de axe dreptunghiulare cu OT axă a x-lor, OM axă a y-lor.

$$M(0, r),\ N(-r', 0),\ T\left(\frac{r^2}{r'}, 0\right),\quad T'\left(\frac{r^2}{2r'}, \frac{r}{2}\right).$$

Ecuaţia dreptei Nr' este

$$y = \frac{rr'}{r^2 + 2r'^2}(x + r').$$

Intersectând cu OM, deci $x = 0$, se găseşte

$$\overline{OP} = \frac{rr'^2}{r^2 + 2r'^2} = \frac{a^3m^2(e^{m\theta})^3}{a^2(e^{m\theta})^2 + 2a^2m^2(a^{m\theta})^2} \quad \therefore$$

$$\overline{OP} = \frac{am^2}{1 + 2m^2} e^{m\theta}.$$

Locul punctului P este deci o spirală logaritmică.

Observare. S'a primit o încercare de rezolvare dela D-l DUMITRU RIPIANU.

C. I. B.

PROBLEMA 5200. *Fie* H, $A_1B_1C_1$ *şi* $A_2B_2C_2$ *ortocentrul, triunghiul ortic şi triunghiul median al triunghiului* ABC. *Insemnăm cu* A_3, B_3, C_3 *intersecţiile perechilor de drepte* (BC, B_1C_1), (AC, A_1C_1), (AB, A_1B_1), *iar cu* M, N, P *intersecţiile perechilor de drepte* (A_2H, AA_3), (B_2H, BB_3), (C_3H, CC_3). *Să se arate că triunghiul format de dreptele* A_1M, B_1N, C_1P *este ortologic cu triunghiul format de mijloacele segmentelor* A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 *şi să se determine centrele de ortologie.*

THEODOR GH. COCEA.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

1. Fie O centrul cercului ABC.

Punctele M, N, P *sunt pe cercul* ABC.

Fie A' simetricul lui A în raport cu O. *Dreapta* A'H *trece prin* A_2, căci BA'CH este paralelogram, deci diagonalele sale se taie, una pe alta, în părţi egale.

Fie B_a şi C_a respectiv simetricele vârfurilor B şi C în raport cu diametrul AA'. Aplicând teorema lui M'KENSIE triunghiului ABC şi secantei $C_1B_1A_3$ (deoarece AA' este perpendiculară pe C_1B_1, punctele B_a, C_a, A sunt intersecţiile paralelelor duse prin B, C, A la secanta $C_1B_1A_3$) rezultă că dreptele C_aC_1, B_aB_1, AA_3 sunt concurente într'un punct M pe cercul ABC. Dacă A'' este punctul unde înălţimea AA_1 taie cercul ABC, dreapta A''A' este paralelă la BC, deci

$$\sphericalangle A''AC = \sphericalangle A''C_aC = \sphericalangle A'AB.$$

De altă parte, J fiind intersecţia dreptelor CC_a şi AB, avem

$$\sphericalangle AJC = \sphericalangle BJC_a,$$

deci comparând triunghiurile rezultate din intersecţia unghiurilor BAA' şi CC_aA'', rezultă că unghiurile $(\overset{\frown}{AA'}, \overset{\frown}{CC_a})$ şi $(\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A''C_a})$ sunt egale, de unde deducem că $A''C_a$ *este perpendiculară pe* AB.

Fie acum C_3' punctul unde dreapta C_1HC taie pe BA'' şi L punctul unde paralela dusă din A la CC_1 taie cercul ABC a doua oară. Aplicând teorema lui M'KENSIE triunghiului ABA'' şi transversalei C_1HC_3', rezultă că dreptele C_aC_1, A'H, $C_3'L$ sunt concurente în acelaşi punct pe cercul ABC (circumscris triunghiului ABA''), deci A'H trece punctul M unde C_aC_1 taie cercul ABC.

2. Unghiul A'MA, fiind înscris într'un semicerc, este drept, deci A_2H este perpendiculară pe AA_3. Rezultă de aici că H *este ortocentru și în triunghiul* A_2AA_3.

Așa dar, *ortocentrul* H *al triunghiului dat* ABC *este încă ortocentru în triunghiurile* A_2AA_3, B_2BB_3, C_2CC_3.

3. Fie acum α, β, γ respectiv mijloacele segmentelor $\overline{A_2A_3}$, $\overline{B_2B_3}$, $\overline{C_2C_3}$ și (α), (β), (γ) cercurile descrise pe $\overline{A_2A_3}$, $\overline{B_2B_3}$, $\overline{C_2C_3}$ ca diametre. Puterea punctului H față de cercul (α) este $\overline{HA_2} \cdot \overline{HM}$, iar din triunghiurile asemenea HMA și HA_1A_2 rezultă că $\overline{HA_2} \cdot \overline{HM} = \overline{HA_1} \cdot \overline{HA}$, deci puterea punctului H în raport cu cercul (α) este egală cu $\overline{HA_1} \cdot \overline{HA}$. Asemenea puterile punctului H în raport cu cercurile (β), (γ) sunt respectiv egale cu $\overline{HB_1} \cdot \overline{HB}$, $\overline{HC_1} \cdot \overline{HC}$. Dar înălțimile triunghiului ABC fiind concurente în H, dau relația

$$\overline{HA_1} \cdot \overline{HA} = \overline{HB_1} \cdot \overline{HB} = \overline{HC_1} \cdot \overline{HC};$$

deci *ortocentrul* H *este centrul radical al cercurilor* (α), (β), (γ).

4. *Perpendicularele duse din* α, β, γ *pe dreptele* AM, BN, CP *sunt concurente în centrul* O *al cercului* ABC.

Să arătăm că perpendiculara dusă din α pe A_1M trece prin O, sau încă, că dreapta $O\alpha$ este perpendiculară pe A_1M.

Fie O_1 centrul cercului AA_2A_3. Punctul H fiind ortocentru comun triunghiurilor AA_2A_3 și ABC, avem după o proprietate a cercului lui EULER, că

$$\overline{OA_2} = \frac{1}{2}\overline{AH} \quad ; \quad \overline{O_1\alpha} = \frac{1}{2}\overline{AH}.$$

Rezultă de aici, că patrulaterul $OA_2\alpha O_1$ este dreptunghiu, deci $\overline{OO_1}$ egal și paralel cu $\overline{A_2\alpha}$, dar $\overline{A_2\alpha} = \overline{\alpha A_3}$, deci $\overline{OO_1}$ egal și paralel cu $\overline{\alpha A_3}$ și ca urmare patrulaterul $O\alpha A_3O_1$ fiind paralelogram, avem că $O\alpha$ este egal și paralel cu $\overline{O_1A_3}$. Insă în triunghiul AA_2A_3, raza O_1A_3 este perpendiculară pe MA_1, deci $O\alpha$ *este perpendiculară pe* MA_1. Analog demonstrăm că $O\beta$ și $O\gamma$ *sunt respectiv perpendiculare pe* NB_1 *și* PC_1.

5. Fie R, S, T intersecțiile (B_1N, C_1P), (C_1P, A_1M), (A_1M, B_1N). Observăm în primul rând că MA_1 este axul radical al cercurilor (O) și (α), deoarece M este un punct al intersecției lor, iar MA_1 este perpendiculară pe dreapta centrelor $O\alpha$. Analog se arată că NB_1 este axul radical al cercurilor (O) și (β). Urmează că

$T(MA_1, NB_1)$ *este centrul radical al cercurilor* (O), (α), (β). Dar am văzut că H este centrul radical al cercurilor (α), (β), (γ); deci H şi T fiind puncte de puteri egale faţă de cercurile (α) şi (β), *dreapta* TH *este axul radical al cercurilor* (α) *şi* (β) şi ca atare *perpendiculară pe dreapta centrelor* $\alpha\beta$ a acestor două cercuri. Analog se arată că SH şi RH sunt respectiv perpendiculare pe $\gamma\alpha$ şi $\beta\gamma$.

Proprietăţile (4) şi (5) arată că triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi RST sunt ortologice, centrele de ortologie fiind *ortocentrul* şi *centrul cercului circumscris* al triunghiului dat ABC.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 5292. *Fie* A_1, B_1, C_1, *punctele unde o dreaptă* (Δ) *taie laturile triunghiului* ABC. *Paralelele duse din* B_1 *la* AB *şi din* C_1 *la* AC *se întâlnesc în* A_0. *Analog se obţin punctele* B_0 *şi* C_0.

1°. *Punctele* A_0, B_0, C_0 *sunt pe o dreaptă* (Δ_0).

2°. *Dacă* (Δ) *e o dreaptă* SIMSON, *dreptele* (Δ) *şi* (Δ_0) *sunt perpendiculare.*

ION C. VASILIU.

1°. Notez cu M, N, P intersecţiile (B_0C_1, C_0A_1) şi similarele. Se văd uşor relaţiile:

$$\frac{A_0N}{A_0P} = \frac{C_1M}{C_1P}, \quad \frac{B_0P}{B_0M} = \frac{A_1N}{A_1M}, \quad \frac{C_0M}{C_0N} = \frac{B_1P}{B_1N}$$

de unde:

$$\frac{A_0N}{A_0P} \cdot \frac{B_0P}{B_0M} \cdot \frac{C_0M}{C_0N} = \frac{C_1M}{C_1P} \cdot \frac{B_1P}{B_1N} \cdot \frac{A_1N}{A_1M} = 1$$

punctele A_0, B_0, C_0 sunt deci colineare.

2°. Fie (Δ') transversala isotomică a dreptei (Δ) şi A', B', C' intersecţiile ei cu laturile triunghiului ABC.

Intru cât:

$\sphericalangle B'AC' = \sphericalangle B_0A_1C_0$, $A_1C_0 = CB_1 = AB'$ şi $A_1B_0 = BC_1 = AC'$, triunghiurile AB'C' şi $A_1B_0C_0$ sunt egale.

Rezultă că: $B'C' \# B_0C_0$, adică $(\Delta') \parallel (\Delta_0)$ (Δ) fiind o dreaptă SIMSON, iar (Δ') transversala ei isotomică, ea va fi perpendiculară pe prima. (TR. LALESCU. — *La géométrie du triangle 4.34*). Şi cum (Δ') şi (Δ_0) sunt paralele, rezultă că dreptele (Δ) şi (Δ_0) sunt perpendiculare.

P. P. DRĂGHICESCU.

Proprietatea se poate generaliza după cum urmează.

Fie (Δ) şi (Δ') două drepte în planul triunghiului ABC şi (A_1, B_1, C_1), (A', B', C') intersecţiile lor cu laturile triunghiului.

Intersecţiile: $(B_1C', B'C_1)$ şi similarele sunt colineare.

Intr'adevăr punctele A_0, B_0, C_0 sunt intersecţiile laturilor opuse ale exagonului $B_1C'A, B'C, A'B_1$ inscris în conica degenerată formată din dreptele (Δ) şi (Δ').

Dacă (Δ') e dreapta dela infinit, regăsim proprietatea din enunţ.

I. C. V.

Alte soluţiuni analitice dela D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi D. RIPIANU.

PROBLEMA 5870. *Să se arată că în orice triunghiu avem relaţia:*

$$\Sigma r_a^2 (r_b + r_c) = S \Sigma a \cot^2 \frac{A}{2}.$$

ION S. ANTONIU.

1. *Soluţie* dată de D-l S-LT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

Din relaţiile uşor de stabilit

$$\frac{r_b}{p-c} = \frac{r_c}{p-b} = \cot \frac{A}{2}$$

se deduce

$$r_b + r_c = (p-b+p-c) \cot \frac{A}{2} = a \cot \frac{A}{2}$$

dar

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{p}{r_a}$$

şi deci

$$a \cot^2 \frac{A}{2} = \frac{p(r_b + r_c)}{r_a}$$

sau

$$\Sigma a\cot^2\frac{A}{2} = p\,\Sigma\,\frac{r_b+r_c}{r_a} = p\left[\frac{r_b+r_c}{r_a}+\frac{r_c+r_a}{r_b}+\frac{r_a+r_b}{r_c}\right]$$

$$= \frac{p}{r_a r_b r_c}(r_b^2 r_c + r_b r_c^2 + r_c^2 r_a + r_c r_a^2 + r_a^2 r_b + r_a r_b^2)$$

$$= \frac{p}{r_a r_b r_c}\,\Sigma r_a^2(r_b+r_c) = S\,\Sigma r_a^2(r_b+r_c)$$

căci $$r_a r_b r_c = \frac{S^2}{r} \quad \text{și} \quad S = pr.$$

2. *Soluție* dată de Domnul MARIN F. VĂDUVA (student inginer, Politechnica din București).

Ținând seamă de relația $r_a = S/(p-a)$ și analoagele, membrul întâi al relației date se poate scrie după oarecare transformări

$$\Sigma r_a^2(r_b+r_c) = Sp\,\Sigma\,\frac{a}{p-a} = Sp\,\frac{\Sigma a(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1)$$

Notând cu N numărătorul fracției din membrul al doilea al relației obținute mai sus și desvoltându-l, obținem:

$$N = p^2(a+b+c) - p(2ab+2bc+2ca) + 3abc.$$

Pe de altă parte avem

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc + 3p(a^2+b^2+c^2) - 4p^3.$$

Scăzând din ambii membri ai acestei relații cantitatea $2p(a^2+b^2+c^2)$, obținem

$$a^3+b^3+c^3 - 2p(a^2+b^2+c^2) = 3abc + p(a^2+b^2+c^2) - 4p^3$$

$$= 3abc - p(2ab+2bc+2ca),$$

căci $$a^2+b^2+c^2 = 4p^2 - (2ab+2bc+2ca).$$

Inlocuind în N pe

$$3abc - p(2ab+2bc+2ca)$$

cu egalul său găsit mai sus, obținem

$$N = p^2(a+b+c) + a^3+b^3+c^3 - 2p(a^2+b^2+c^2)$$

$$= a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2.$$

Ducând această valoare în relația (1) obținem succesiv:

$$\Sigma r_a^2 (r_b + r_c) = Sp \frac{\Sigma a\,(p-a)^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= S \Sigma \frac{ap\,(p-a)}{(p-b)\,(p-c)} = S \Sigma a \cot^2 \frac{A}{2}.$$

Alte soluții date de d-nii: CĂPITAN EUG. ST. IACOB, SUBLOCOT. PANTELIMON CONSTANTIN (Artileria antiaeriană Ploești), P. P. DRĂGHICESCU (student-inginer), ȚIGĂNOIU I. ALEXANDRU (Politechnica Timișoara), CONST. I. STAICU, EUGEN N. WEGENER (București), DUMITRU GH. VASILIU (clasa a VIII-a, Liceul Militar Iași), CONST. C. TINCU (clasa a VII-a, Liceul „Diaconovici Loga", Timișoara), EMIL MARINESCU (clasa a VII-a, Liceul „Aurel Vlaicu" București), MIHAI SP. MANOLIU (clasa a VII-a, Liceul „Gh. R. Codreanu"), CRISTU I. CANTUNIAR și TRAIAN V. MUSTĂCESCU (clasa a VII-a, Liceul „Titu Maiorescu" București), ILIE N. CONSTANTINESCU (clasa a VII-a, Liceul „N. Bălcescu" Brăila), M. A. LEON (Liceul Aurel Vlaicu, București) și GH. GH. VRÂNCEANU (clasa a VI-a, Liceul Militar „Mihai Viteazul" Timișoara).

I. S. A.

PROBLEMA 5971. *Să se rezolve ecuația*

$$\cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x = 0.$$

CPT. EUG. ȘT. IACOB.

Soluție dată de D-nii: ILIE V. CONSTANTINESCU (Liceul Bălcescu, Brăila), C. C. ILIESCU (Școala ofițeri tehnici auto), MIHAI AL. LEON (Liceul Aurel Vlaicu, București), MIHAI S. MANOLIU (Liceul Codreanu, Bârlad), GEORGE M. NICOLAE (Colegiul național Carol I, Craiova), SLT. CONSTANTIN PANTELIMON (Artileria antiaeriană, Ploești), GH. VRÂNCEANU (Liceul militar Mihai Viteazul, Timișoara), EUGEN N. WEGENER (București).

Expresia din partea I se mai scrie:

$$(\cos 3x + \cos 5x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 2\cos x \cos 4x + 2\cos x \cos 5x$$

$$= 2\cos x \left[\cos 4x + \cos 5x\right] = 2\cos x \left[2\cos x \frac{x}{2} \cos \frac{9x}{2}\right].$$

Ecuaţia este

$$\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{9x}{2} = 0$$

de unde următoarele trei ecuaţii

$$\cos x = 0,\ \cos\frac{x}{2} = 0,\ \cos\frac{9x}{2} = 0$$

cu soluţiile

$$x = \frac{(k+1)\pi}{2}\ ,\quad x = (2k+1)\pi\ ,\quad x = \frac{(2k+1)\pi}{9}$$

Observare. D-l MIHAI M. CONSTANTINESCU (Ploeşti) a rezolvat şi ecuaţia mai generală

$$\cos\alpha x + \cos(a+1)x + \cos(a+2)x + \cos(a+3)x = 0.$$

C. I. B.

EXERCIŢII

8. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & ax+y & c \\ y & xy+c & y \\ c & cx+a & a \end{vmatrix} = 0$$

a şi c fiind cunoscute.

I. A. BARBU.

R. Se adună la linia întâia celelalte linii şi se obţine

$$\Delta = (a+c+y)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1 \\ y & xy+c & y \\ c & cx+a & a \end{vmatrix}.$$

In determinantul astfel obţinut scădem coloana a treia din prima şi obţinem

$$\Delta = (a+c+y)\begin{vmatrix} 0 & x+1 & 1 \\ 0 & xy+c & y \\ c-a & cx+a & a \end{vmatrix} = (a+c+y)(c-a)(y-c) = 0.$$

soluţiile ecuaţiei sunt deci

$$y = c\ ;\ y = -(a+c)\ ;\ x = \textit{nedeterminat}.$$

9. *Să se arate că*

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a & \sin a \\ 1 & \cos^2 b & \sin b \\ 1 & \cos^2 c & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 a & 1 & \sin a \\ \sin^2 b & 1 & \sin b \\ \sin^2 c & 1 & \sin c \end{vmatrix} = \sum \sin^2 a \,(\sin c - \sin b).$$

I. A. BARBU.

R. Se înlocueşte $\cos^2$ prin $1 - \sin^2$ apoi se scade coloana a doua din prima şi se adună coloana întâi la a doua. Se obţine determinantul al doilea care desvoltat dă suma din urmă.

PROBLEME PROPUSE

6050. O persoană împrumută 120.005 lei pe care îi achită în 35 ani cu 4% dobândă simplă. Care este anuitatea?

I. IONESCU.

6051. Să se găsească toate patratele de 6 cifre care au 3 cifre egale între ele.

G-L GH. BUICLIU.

6052. Cubul şi patratul unui număr pot fi terminate în complimentele aritmetice faţă de 10^p?

I. V. MĂTIEŞ.

6053. Intre A şi B sunt mai puţine numere prime decât între A^2 şi AB sau între AB şi B^2.

COMANDOR I. LINTEŞ.

6054. Fie $n\,(N)$ numărul divizorilor aritmetici ai întregului N. Să se demonstreze inegalitatea

$$n\,(x \,.\, y) < x + y.$$

IOAN B. FLORESCU.

6055. Intr'un exagon înscris în cercul de centru O şi având punctul M ca baricentru al vârfurilor, ortocentrele triunghiurilor formate de trei vârfuri consecutive sunt vârfurile unui exagon ale cărui diagonale principale concură într'un punct P aşa încât:

$$\overline{OP} = 3 \,.\, \overline{OM}.$$

V. THÉBAULT.

6056. In unghiul 2α se înscrie cercul (O) de rază R. Să se demonstreze că se pot înscrie în același unghiu 2α, două cercuri de raze $R_1 < R$, $R_0 > R$ și ortogonale cercului (O).

Să se dea construcția acestor cercuri și să se găsească relația între razele R, R_1 și R_0.

Fie $R_2 < R_1$ raza unui cerc înscris în unghiul 2α și ortogonal cercului de rază R_1. Fie în general $R_i < R_{i-1}$ raza cercului înscris în unghiul 2α și ortogonal cercului R_{i-1}.

Să se calculeze suma suprafețelor comune cercurilor de rază $(R, R_1), (R_1, R_2), \ldots (R_{n-1}, R_n)$, când n tinde la infinit.

Să se arate că punctele comune cercurilor

$$(R, R_1), (R_1, R_2), \ldots (R_{n-1}, R_n)$$

și aflate de aceeași parte a liniei centrelor sunt colineare.

CPT. AURELIAN STAN.

6057. Să se verifice că

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_{i-r}^{s-r} C_{i-s-1}^{i-k-1} C_{n-s}^{k-r} = (-1)^k C_{n-i}^{k-r}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

6058. Se dă determinantul de ordinul n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 2 \\ a & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 3 \\ a & a & 0 & 1 \ldots & 0 & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & a \ldots & 1 & n-1 \\ a & a & a & a \ldots & 0 & n \end{vmatrix}$$

1°. Să se demonstreze că între determinanții D_i $(i=1, 2, 3\ldots)$ există următoarea relație:

$$D_n + (a-1) D_{n-1} + a^2 D_{n-2} + a^3 D_{n-3} + \ldots + a^p D_{n-p} + \ldots + a^{n-1} D_1 = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}.$$

Ce devine această relaţie dacă elementele ultimei coloane a lui D_n se înlocuesc prin termenii unei progresii aritmetice cu raţia r?

2°. Să se calculeze determinantul dat D_n.

GH. D. SIMIONESCU.

6059. Să se găsească trei polinoame f, g, h de x astfel încât să avem

$$f = g'g'' \quad , \quad g = h'h'' \quad , \quad h = f'f''$$

accentele însemnând derivare.

TIBERIU POPOVICIU.

6060. Să se arate că între unghiurile unui triunghiu sferic ABC, există relaţia

$$\sin(A - S) + \sin(B - S) + \sin(C - S) - \sin S = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

unde $2S = A + B + C - \pi$ este *excesul sferic* al triunghiului.

M. GHERMĂNESCU.

6061. O curbă algebrică plană este întâlnită de o dreaptă Δ, ce trece prin punctul A al planului său, în punctele $M_1, M_2, \ldots M_n$.

1°. Când Δ se roteşte în jurul lui A, locul geometric al punctului M astfel ca

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AM}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{AM_i} + k = 0,$$

(k fiind o constantă) este un cerc C_k.

2°. Când k variază, cercurile C_k formează un fascicol liniar de cercuri având pe A punct al lui PONCELET.

3°. Să se determine curbele C pentru care al doilea punct al lui PONCELET al fascicolului de cercuri C_k se află pe un cerc cu centrul în A.

C. IONESCU-BUJOR.

6062. Se dau două plane AB și BC egal înclinate față de planul orizontal cu unghiul α și întretăindu-se după orizontala proiectată în B. Din A se dă drumul unui mobil fără iuțeală inițială, pe planul înclinat AB. Mobilul se ciocnește în B cu celălalt plan înclinat (coeficient de elasticitate k) și sare în punctul C.

Cât trebue să fie frecarea între mobil și planul AB, pentru ca AB = BC?

GABRIELA ȚIȚEICA.

6063. Pe o masă orizontală *foarte lucioasă* (frecare nulă), se află o placă pătrată de latură $2a$ și de massă m pe care șade o insectă de massă m_1 la distanța a de centrul plăcii. Sistemul este în repaos. La un moment dat, insecta se pune în mișcare descriind un cerc în jurul centrului plăcii *cu iuțeala constantă* v *în raport cu placa.*

Să se studieze mișcarea absolută a plăcii și a insectei.

ALEXANDRU STOENESCU.

6064. Fie

$$u_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos nt \, dt.$$

Să se arate că seria Σu_n este convergentă și are suma egală cu πe.

ȘERBAN GHEORGHIU.

ERATĂ. 1°. La problema 6017, propusă la pag. 56 din acest volum, prima ecuație este

$$y'^2y'' + yy'y''' - 2yy''^2 = 0.$$

2°. La problema 6029, propusă la pag. 111 din acest volum, egalitățiile de demonstrat sunt:

a) (aria ABB'A')^2 — (aria CDD'C')^2 = (aria ABB'A' . aria ADD'A' + aria BCC'B' . aria CDD'C') cosα + (aria ABB'A' . aria BCC'B' + aria ADD'A' . aria CDD'C') cosβ.

b) (aria ADD'A')^2 — (aria BCC'B')^2 = (aria ABB'A' . aria ADD'A' + aria BCC'B' . aria CDD'C') cosα — (aria ABB'A' . aria BCC'B' + aria ADD'A' . aria CDD'C') cosβ.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Cantuniar I. Cristu (5908, 26, 54, 6015); *Cocea T.* (P); *Constantinescu R. M.* (6007, 12, 15); *Diaconu C. C.* (5871); *Drăghicescu P. P.* (P); *Florescu B. I.* (P); *Ieşan Şt. Al.* (5926); *Munteanu Gh. Lucian* (5907); *Pătrăscioiu I. M.* (3552, 5815, 41, 86, 916, 36, 42, 56, 66, 83); *Scumpia A. Marius* (5840, 954, 56, 66, 80); *Timotin Al. Al.* (5852, 61, 96, 907, 26, 33).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 500

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 600

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 450

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 750

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 350

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 500

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 500

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 200

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . . Lei 950

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 600

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 300

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei 300

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 28.081.